第38卷 第8期 西 安 交 通 大 学 学 报 Vol.38 №8
2004年8月 JOURNAL OF XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY Aug. 2004

一个具有对偶适应度函数的遗传算法

李乃成，陈白丽，高 岫
(西安交通大学理学院，710049，西安)

摘要：提出一个具有对偶适应度函数的遗传算法.该法提供了一个阈值，利用对偶适应度函数值辨别全局最优盆和局部最优盆.根据辨识结果，自适应地设置变异概率.对几种典型函数的测试结果表明，该法的全局收敛性能及收敛速度优于标准遗传算法.

关键词：遗传算法；对偶适应度函数；阈值；最优盆
中图分类号：TP18 文献标识码：A 文章编号：0253-987X(2004)08-0811-04

Genetic Algorithm with Dual Fitness Function

Li Naicheng, Chen Baili, Gao Xiu
(School of Sciences, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: A genetic algorithm with a dual fitness function was proposed. The present algorithm provides a threshold and uses the value of the dual fitness function to distinguish global optimal and local optimal basins. According to the distinguished result, the algorithm adaptively sets the mutation rate. The experimental results show that the proposed algorithm has the advantage of guaranteed global convergence over the standard genetic algorithm.

Keywords: *genetic algorithm; dual fitness function; threshold; optimal basin*

用遗传算法求解一个具体的问题，应给出诸如种群规模、杂交概率、变异概率等遗传参数.这些参数的设置与求解的问题有关，目前尚无合理设置它们的理论依据.对于给定的一个具体问题，设置合适的参数决非易事，若参数设置不当，将会严重地影响遗传算法的执行效果.另一方面，遗传算法模仿生物的遗传进化过程，自然希望遗传算法具有生物的自适应特征.几位学者从不同的角度研究了遗传参数的设置，在这方面做了大量的工作[1-8].然而，所有的研究成果对遗传算法设置合适的参数仍缺乏一个很好的启发，对所研究的问题，目前尚无设置合适参数的成熟原则和方法，对遗传算法设置合适的参数似乎技巧的成分多于科学的成分.

本文致力于设置合适的变异概率，提出一个具有对偶适应度函数的遗传算法(GADFF).该方法提供了一个阈值，利用对偶适应度函数辨别局部最优盆和全局最优盆.对于处于局部最优盆中的个体，则给它设置一个较大的变异概率；否则，对它设置较小的变异概率.由于自适应地设置变异概率，因而在算法的执行过程中落在局部最优盆中的个体以相对大的概率从局部最优盆中逸出.该方法在很大程度上有避免个体落入局部最优盆的能力.实例计算表明，本文提出的遗传算法的执行效果优于标准遗传算法(SGA).

1 数学基础

考虑求解下面的最优化问题

$$\max f(x) \tag{1}$$

式中：$x \in S \subset R^n$，S 是有界集；$f(x)$ 是正实值目标函数.

在遗传算法中，个体的适应值代表个体的生存能力.利用适应值来评估个体或解的优劣，以个体适

收稿日期：2003-11-15. 作者简介：李乃成(1951～)男，副教授. 基金项目：国家高技术研究发展计划资助项目(2001AA113182).

应值的大小来确定个体被遗传到下一代种群的概率. 利用遗传算法求解上述优化问题,本文取适应度函数为目标函数或它的尺度变换函数. 为了方便,仍用 $f(x)$ 表示适应度函数. 定义对偶适应度函数如下

$$g_c(x) = \frac{-f(x)}{f^2(x) + c} \tag{2}$$

下面的定理给出了在一定的条件下,$f(x)$ 的局部极大点与 $g_c(x)$ 的局部极值点之间的关系.

定理　设 $f: R^n \to R^1$, $f(x) \geq 0$, x^* 是 $f(x)$ 的一个局部极大点. 若 f 是连续函数或对于 $f(x)$ 的任意一个局部极大点 x^*,存在一个常数 $k(0 < k < 1)$,使得 x^* 的邻域

$$\Omega(x^*) = \{x \mid kf^2(x^*) < f^2(x) < f^2(x^*)\} \tag{3}$$

有定义,则:

(1) 如果 $f^2(x^*) < c$, x^* 是 $g_c(x)$ 的一个局部极小点;

(2) 如果 $0 < c < kf^2(x^*)$, x^* 是 $g_c(x)$ 的一个局部极大点.

证明　(1) 令 $\Psi(x^*) = \{x \mid f(x) < f(x^*)\}$,则对任意的 $x \in \Psi(x^*)$,有

$$g_c(x) - g_c(x^*) = \frac{[f(x^*) - f(x)][c - f(x^*)f(x)]}{[f^2(x) + c][f^2(x^*) + c]} > \frac{[f(x^*) - f(x)][c - f^2(x^*)]}{[f^2(x) + c][f^2(x^*) + c]} > 0$$

这表明 x^* 是 $g_c(x)$ 的一个局部极小点.

(2) 如果 $f(x)$ 是连续函数,显然存在 $0 < k < 1$,使得 x^* 的邻域

$$\Omega(x^*) = \{x \mid kf^2(x^*) < f^2(x) < f^2(x^*)\}$$

有定义. 对于任意的 $x \in \Omega(x^*)$,有

$$g_c(x) - g_c(x^*) = \frac{[f(x^*) - f(x)][c - f(x^*)f(x)]}{[f^2(x) + c][f^2(x^*) + c]} < \frac{[f(x^*) - f(x)][c - f^2(x)]}{[f^2(x) + c][f^2(x^*) + c]} < \frac{[f(x^*) - f(x)][c - kf^2(x^*)]}{[f^2(x) + c][f^2(x^*) + c]} < 0$$

由此可知, x^* 是 $g_c(x)$ 的一个局部极大点.

这个定理表明,可将 $c^{1/2}$ 作为排除 $f(x)$ 局部极大点的准则,若 $f(x^*) < c^{1/2}$,就认为 x^* 是 $f(x)$ 的一个局部极大点,否则 x^* 可能是 $f(x)$ 的全局极大点. 逐步增加 c 值,不断地排除 $f(x)$ 的局部极大点,最终便可求 $f(x)$ 的全局极大点.

g_c 是原来适应度函数的一个变换,它将 f 的局部极大点变换为 g_c 的极小点,将 f 的全局极大点变换为 g_c 的极大点. 这就是将 g_c 称为对偶适应度函数的原因.

这个定理的意义在于,若取当前最佳适应值作为 $c^{1/2}$,可以通过分别计算 f 和 g_c 在盆中任何两点的函数值来辨别局部最优盆和全局最优盆. 根据辨别结果,自适应地设置变异概率去搜索新的更好的最优解.

在遗传算法中,采用与适应度成正比的概率复制个体,通过杂交和变异操作形成新的一代,与之相关的一个数学问题是不能确保这个搜索过程渐进地收敛于一个全局最优解. 虽然随着种群的进化会产生越来越多的优良个体,但由于选择、交叉、变异等遗传操作的随机性可能会破坏掉或丢掉当前种群中适应度最好的个体,从而降低种群的平均适应度,并且对遗传算法的运行效率和收敛性产生不利的影响. 为尽可能地使适应度最好的个体保存到下一代种群,本文采用最佳保留策略进行优胜劣汰操作,这就保证了遗传算法以概率 1 收敛到最优解[8]. 显然,可以取 $c = f^2(x_{\mathrm{elitist}}) + \varepsilon$,其中 ε 是一个很小的正实数. 本文算法中,最佳保留选择策略能指导搜索方向,因此可以说本文算法比标准遗传算法更好地利用了最佳保留选择策略.

2　具有对偶适应度函数的遗传算法

按照前述定理,提出一个具有对偶适应度函数的遗传算法,可以认为该法是一个全局优化方法. 首先,随机地选取初始种群$\{x_1, x_1, \cdots, x_N\}$,其中 N 是种群规模,设置 c 的初始值. 然后,对这个种群执行选择、杂交运算,得到中间种群为$\{x'_1, x'_2, \cdots, x'_N\}$. 利用定理结论辨别当前全局最优盆和局部最优盆. 当个体 x'_i 处于局部最优盆时,让它进入下一代种群意义不大,对它设置一个高值的变异概率来扩大搜索空间. 相反,若 x'_i 处于一个包含新的更好的最优解区域时,为了保留它的好特性,给它设置低值的变异概率. 执行变异操作和最佳保留策略后,得到下一代种群. 然后,修正 c 值,重复执行这个过程,直到满足终止条件.

为了更清楚地说明这个算法,将其计算过程总结如下.

(1) 随机产生初始种群 $X(0) = \{x_1(0), \cdots, x_N(0)\}$,设置 c 的初始值.

(2) 计算每个个体 $x_i(0)$ 的适应值 $f(x_i(0))$.

(3) 重复执行以下操作:

执行选择操作;

执行杂交操作;

执行自适应设置变异概率的过程;

执行变异操作,产生子代个体;

计算子代个体的适应值;

修正 c 值,直到满足终止条件.

自适应设置变异概率是算法的关键部分,利用前述定理,这个过程的框架如下.

对种群中的每个个体重复执行以下过程:

(1) 对于个体 x 计算 $f(x)$ 和 $g_c(x)$;

(2) 在 x 的邻域中找一点 $\tilde{x}$,计算 $f(\tilde{x})$ 和 $g_c(\tilde{x})$;

(3) 如果 $[f(x) - f(\tilde{x})][g_c(x) - g_c(\tilde{x})] < 0$,则置 P_m 为 P_{mh},若 $[f(x) - f(\tilde{x})][g_c(x) - g_c(\tilde{x})] > 0$,则置 P_m 为 P_{ml}.

这个算法中最重要的一点是对偶适应度函数 $g_c(x)$ 中参数 c 的设置. 给定 c 值就意味着设置一个阈值来辨别局部极大点和全局极大点. 在计算中令 $c = f^2(x_{elitist}) + \varepsilon$,其中 $x_{elitist}$ 是上一代种群中最佳个体,ε 是一个很小的正实数. 对于个体 x,若 $[f(x) - f(\tilde{x})][g_c(x) - g_c(\tilde{x})] < 0$,就认为 x 落入局部最优盆,若 $[f(x) - f(\tilde{x})][g_c(x) - g_c(\tilde{x})] > 0$,就认为 x 落入全局最优盆.

对于每个给定的 c,利用对偶适应度函数区分局部最优盆和全局最优盆. 参数 c 的值随代数的增加而增大,因此越来越多的局部最优盆被识别. 落入局部最优盆的个体以相对大的概率从局部最优盆中逸出. 随着进化代数的增加和变异概率的自适应设置,最终求得 $f(x)$ 的全局极大点,故认为这个算法是一个全局优化方法.

3　数值试验

用下面一组测试函数将本文提出的 GADFF 算法与 SGA 算法进行比较如下

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 \quad -5.12 \le x_i \le 5.12$$

$$f_2(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 0.3\cos(3\pi x_1) - 0.4\cos(3\pi x_2) + 0.7 \quad -1 \le x_i \le 1$$

$$f_3(x) = 100(x_1^2 - x_2)^2 + (1 - x_1)^2 \quad -2.048 \le x_i \le 2.048$$

$$f_4(x) = 0.5 + \frac{\sin^2(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} - 0.5}{[1.0 + 0.001(x_1^2 + x_2^2)]^2} \quad -128 \le x_i \le 128$$

$$f_5(x) = 40 + \sum_{i=1}^{20}(x_i^2 - 2\cos(2\pi x_i)) \quad -5.12 \le x_i \le 5.12$$

上面的这组测试函数都是求极小的问题,我们能容易地将它们变为求极大的问题. f_1 是一个简单的平方和函数,用遗传算法易于求解;f_2 是具有几个局部极小点的多峰函数;f_3 被称为 Rosenbrock 函数,虽然是单峰函数,但它是病态的,难以进行全局极小化;f_4 是正弦波包络函数,它是一个急剧变化的多峰函数,由于它强烈的震荡特性以及它的全局最优点(0,0)被次最优点包围的特性,一般算法很难求得它的全局最优解;f_5 被称为 Rastrigin 函数,它是个高维问题,并且具有大量的局部极小点,用遗传算法求解是相当困难的.

求解以上问题,使用标准的二进制编码单点杂交、单点变异和最佳保留策略. 在用标准遗传算法求解时,参数取固定值:种群规模 $N = 50$,杂交概率 $P_c = 0.85$,变异概率 $P_m = 0.01$. 用本文算法求解时,设置变异概率 $P_{ml} = 0.01$, $P_{mh} = 0.9$,其他参数同标准遗传算法.

利用以上两种算法分别对 f_1～f_3 采用不同的初始种群独立地运行 30 次,对 f_4 和 f_5 独立地运行 10 次. 从执行情况来看,测试函数 f_1～f_3 求解比较容易,当最优解满足预先指定的精度或者至多执行到 2 000 代,终止算法的运行. 求解函数 f_4 和 f_5 则更困难一些,两种算法均执行了 8 000 代后将其终止,从收敛图上看到 GADFF 算法的运行情况比 SGA 算法的好得多.

表 1 列出了两种算法求解测试函数 f_1、f_2、f_3 的执行结果,从中可以看到,GADFF 算法在收敛速度和精度两方面均优于 SGA 算法.

表 1　GADFF 算法和 SGA 算法对函数 f_1～f_3 的执行情况

函数	串长	平均收敛代数		平均误差		成功次数/次	
		GADFF	SGA	GADFF	SGA	GADFF	SGA
f_1	60	198.10	381.40	0.023 8	0.020 8	30	30
f_2	40	57.30	150.77	0.005 8	0.005 8	30	30
f_3	40	221.00	1 011.20	0.030 5	0.104 0	30	21

注:平均误差是最优解取欧氏范数的平均误差,成功次数是指算法独立地执行 30 次,成功地求得最优解的次数.

本文算法可以很容易地求出函数 f_1、f_2、f_3 的最优解,这说明本文算法的自适应设置变异概率的策略是正确的. 但是,本文算法对一些函数算法的收敛速度很快,而对某些函数都不尽人意. 这是由于函数

的极值点分布不同及其函数特性不同,搜索全局最优解的难度也不尽相同,故算法的表现性能也有差异.

4 结 论

本文提出了一个具有对偶适应度函数的遗传算法.引入对偶适应度函数的目的是提供一个阈值来识别全局最优盆和局部最优盆.然后,利用这些信息设置合适的变异概率.用一组最优化问题的测试函数对GADFF算法与SGA算法进行了比较.计算结果表明,GADFF算法在收敛速度和计算精度方面均优于SGA算法.

参考文献:

[1] De Jong K A. An analysis of the behavior of a class of genetic adaptive systems[D]. Ann Arbor, USA: The University of Michigan, 1975.

[2] Grefenstette J J. Optimization of control parameters for genetic algorithms[J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 1986, 16(1): 122-128.

[3] Goldberg D E. Sizing populations for serial and parallel genetic algorithms[A]. Schaffer J. Proceedings of the Third International Conference on Genetic Algorithms[C]. Los Altos, USA: Morgan Kaufmann Publishers, 1989.

[4] Davis L D. Adapting operator probabilities in genetic algorithms[A]. Schaffer J. Proceedings of the Third International Conference on Genetic Algorithms[C]. Los Altos, USA: Morgan Kaufmann Publishers, 1989.

[5] Davis L D. Handbook of genetic algorithms[M]. New York: Van Nostrand Reinhold, 1991.

[6] Reeves C R. A genetic algorithm for flowshop sequencing[J]. Computers and Ops Res, 1995, 22(1): 5-13.

[7] Srinivas M, Patnaik L M. Adaptive probabilities of crossover and mutation in genetic algorithms[J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Gybernetics, 1994, 24(4): 656-667.

[8] 周 明,孙树栋. 遗传算法原理及其应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 1999.

(编辑 杜秀杰)

《西安电子科技大学学报》2004年第2期部分目次