第38卷 第4期 西 安 交 通 大 学 学 报 Vol.38 №4
2004年4月 JOURNAL OF XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY Apr. 2004

关于算子谱集理论中的 Von Neumann 不等式的研究

王 刚, 程正兴
(西安交通大学理学院, 710049, 西安)

摘要: 首先,应用泛函分析的基本理论给出关于压缩算子的 Von Neumann 不等式的一个证明. 其次,构造了一个 Hermitian 代数,并说明其中 Von Neumann 不等式不必成立. 再次,应用 Ky Fan 的结果把解析函数论中几个简单而重要的结论转化到 Hilbert 空间算子函数上来.

关键词: Von Neumann 不等式;压缩算子;Riesz-Dunford 积分;正规算子;酉算子
中图分类号: O177.1 文献标识码: A 文章编号: 0253-987X(2004)04-0436-03

On the Von Neumann's Inequality in Operator Spectral Theory

Wang Gang, Cheng Zhengxing
(School of Sciences, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: By using fundamental theory of functional analysis, a new proof of Von Neumann inequality for contraction operator was given. A Hermitian algebra is constructed in which Von Neumann inequality is not true. By virtue of the Ky Fan's results, several simple and important conclusions were constructed from the theory of Holomorphic functions to operator functions in Hilbert space.

Keywords: *Von Neumanny's inequality; contraction operators; Riesz-Dunford integral; normal operator; unitary operator*

1 Von Neumann 定理及其证明

Von Neumann 定理也称为 Von Neumann 不等式,就是定理 A.

定理 A 对 Hilbert 空间 H 上的压缩算子 T 和 Δ 的某个邻域 Ω 内满足 $|f(z)| \leq 1$ ($z \in \Delta$,闭单位圆盘)的任一解析函数 f, $\tilde{f}(T)$ 也是压缩的,即 $\|f(T)\| \leq 1$.

算子 $\tilde{f}(T)$ 表示 Riesz-Dunford 积分

$$\tilde{f}(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda I - T)^{-1}\mathrm{d}\lambda$$

式中: Γ 是 Ω 内环绕 $\sigma(T)$ 的任一围道. Riesz-Dunford 积分-解析函数表示对任何 Banach 空间上的算子或抽象的酉 Banach 代数都是有定义的.

Von Neumann 定理是研究算子理论的重要工具. 由于它的重要性,数学家们不断给出新的证明,同时寻求它在各种意义下的推广及其应用. 1978 年 Ky Fan 用纯函数论的方法证明了定理 B.

定理 B[1] 设 T 是 Hilbert 空间 H 上的真压缩算子,即 $\|T\| < 1$. f 是 Δ 内真压缩解析函数,即 $|f(z)| < 1$ ($z \in \Delta$),则 $\tilde{f}(T)$ 也是真压缩的,即 $\|\tilde{f}(T)\| < 1$.

Ky Fan 还证明了定理 B 与 Von Neumann 定理 A 是等价的,因而为证明 Von Neumann 定理 A,只需证明定理 B.

首先,我们导出 Hilbert 空间上正规算子的一个结果,以下用到的记号、结论均见文献[2].

定理 1 设 Hilbert 空间 H 上的正规算子, $f \in H(\sigma(T))$,则 Riesz-Dunford 表示式

$$\tilde{f}(T) = \int_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda I - T)^{-1}\mathrm{d}\lambda \tag{1}$$

中的 $\tilde{f}(T)$ 与由谱定理导出的函数演算而得到的

$$f(T) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda)\,\mathrm{d}E(\lambda) \tag{2}$$

收稿日期: 2003-05-13. 作者简介: 王 刚(1971～),男,博士生;程正兴(联系人),男,教授,博士生导师.

' 1995-2004 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

中的 $f(T)$ 是同一算子.

证明　我们知道, Riesz-Dunford 积分要求 $f \in H(\sigma(T))$,谱定理要求 $f \in C(\sigma(T))$,构造一个拓扑代数 $\widetilde{C}(\sigma(T))$,使得 $H(\sigma(T))$ 是 $\widetilde{C}(\sigma(T))$ 的拓扑子代数;又根据 Tietze 扩张定理 $\widetilde{C}(\sigma(T))$ 与 $C(\sigma(T))$ 是拓扑等同的,从而 $H(\sigma(T))$ 是 $C(\sigma(T))$ 的拓扑子代数. 于是,在定理已知条件下,文献[2]中的定理 10. 27 与定理 12. 24 都成立. 利用这两个定理得到 $H(\sigma(T)) \to B(H)$ 的连续代数同态 Φ: $\Phi(f) = \widetilde{f}(T)$ 及 $\widetilde{C}(\sigma(T)) \to B(H)$ 的连续代数同态 $\Psi(f) = f(T)$,若 Ω 是 $\sigma(T)$ 的一个邻域,则对极点不在 Ω 内的任一有理函数 R,得到 $\Psi(R) = \Phi(R)$.

然后对 $f \in H(\sigma(T))$,根据 Runge 定理[3]及 Φ 与 Ψ 的连续性,得到 $\Phi(f) = \Psi(f)$,即 $\widetilde{f}(T) = f(T)$. 证毕.

根据谱定理,对每个 $f \in \widetilde{C}(\sigma(T))$,都有

$$\|f(T)\| = \|f\|_\infty = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |f(\lambda)|^{[2]} \quad (3)$$

即 Ψ 是等距的,于是证明了正规压缩算子的 Von Neumann 的结论. 因此,Von Neumann 定理的证明便归结为压缩算子的酉膨胀问题. 以下,我们去构造一个较为简明的酉膨胀.

熟知,Hilbert 空间 H 上的算子 T 为压缩算子当且仅当 T 存在酉膨胀,现设 $T \in B(H)$, $\|T\| < 1$. 那么, T 幂强收敛于 0,即 $\forall x \in H$, $\lim\limits_{n \to \infty} \|T^n x\| = 0$. 这就符合文献[4]的条件,我们把文献[4]的构造延伸成双向,得到 T 的一个酉幂膨胀 W. 定义 $(x, y)_0 = (x, y)_H - (Tx, Ty)_H$, $x, y \in H$,命 $\|x\|_0^2 = (x, x)_0$, $x \in H$, H 赋予新的等价范数 $\|\cdot\|_0$ 得到的 Hilbert 的空间记为 H_0.

命 $K = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} H_n (\forall n \in Z) = \{\zeta : z \to \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|\zeta(n)\|_0^2 < \infty\}$,然后, $W: K \to K$, $(W\zeta)(n) = \zeta(n+1)$, $n \in Z$ 是 K 上的酉算子,作映射 $j: H \to K$, $x \in H$,

$$(jx)(n) = \begin{cases} T^n x & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases},\text{则}$$

$$T^n = j^* W^n j \quad n = 0,1,2 \quad (4)$$

下面,证明定理 B. 由式(4),对每个多项式 $p(\lambda)$,有

$$p(T) = j^* p(W) j$$

因 j 是等距,又 W 是酉算子,据式(3)有

$$\|p(t)\| \leq \|p(W)\| = \|p\|_\infty \quad (5)$$

现在 $f \in H(\Delta)$, $|f(z)| < 1 (z \in \Delta)$, T 为真压缩,紧子集 $\sigma(T) \subset \Delta$,那么 $\|f\|_\infty = \sup_{\lambda \in \sigma(T) \subset \Delta} |f(\lambda)| < 1$. 应用 Runge 定理,这时存在多项式列 $\{p_n\}$ 在 Δ 内闭一致收敛于 f. 由式(5)及映射 Ψ 的连续性,得到

$$\|\widetilde{f}(T)\| \leq \|f\|_\infty < 1$$

证毕.

2　在 Hermitian 代数中, Von Neumann 定理不必成立

A. Elkinani 指出[5],在 Hermitian 代数中用半范 $T \to |T| = r(T^* T)^{\frac{1}{2}}$ 代替范数 $\|\cdot\|$,就把 Von Neumann 定理推广成定理 C.

定理 C　设 $T \in u$, $|T| \leq 1$, $f \in H(\Delta)$ 满足 $|f(\lambda)| \leq 1 (\lambda \in \Delta)$,则 $|\widetilde{f}(T)| \leq 1$.

本节我们要给出一个 Hermitian 代数,说明其中定理 A 也不必成立,这显示出 A. Elkinani 的定理 C 的意义.

首先,给出一个 Hermitian 代数 $B(C^2)$. 设 $z = \langle z_1, z_2 \rangle \in C^2$ (二维复空间),并定义

$$\|z\| = |z_1| + |z_2| \quad (6)$$

注意这里 $\|\cdot\|$ 是 C^2 的 Banach 范数,但不是 C^*-范数. 式(6)决定着 C^2 上线性有界算子

$$T_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad a, b, c, d \in C$$

的范数. 于是,不难验证在自然对合(T_1^* 是 T_1 的共轭转置)之下, $B(C^2)$ 是具有连续对合的酉 Banach 代数. 又因为自伴元 $T_1 = T_1^*$ 有实谱,所以 $B(C^2)$ 是一个 Hermitian 代数.

在 $B(C^2)$ 上定理 A 不必成立. 例如:设 $T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,易知 $\|T_2\| = 1$, $\sigma(T_2) = \{-1, 1\}$.

命 $f(z) = \dfrac{z + \alpha}{1 - \bar{\alpha} z}$, $\alpha \in C$, $|\alpha| < 1$, $\alpha \neq \bar{\alpha}$,则 $f \in H(\Delta)$ 且 $|f(z)| \leq 1 (z \in \Delta)$. 简单的矩阵计算发现定理 A 不成立,进一步的推导说明,对本例定理 C 是成立的.

3　Ky Fan 结果的若干应用

Ky Fan 给出了定理 B[1],有了定理 B 使得单位圆内解析函数中的许多重要结果很自然地拓广到算子函数上来.

我们得到的主要结果如下.

定理 2　设 $A, B \in B(H)$, $\|A\| < 1$, $\|B\| < 1$. 又 $AB = BA$,且 B 正规,则成立着下述两个等价性不等式

© 1995-2004 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$\| (B - A)(I - B^* A)^{-1} \| < 1 \tag{7}$$

$$(B^* - A^*)(B - A) < (I - A^* B)(I - B^* A) \tag{8}$$

若令 $B = \alpha I$,就得到推论1.

推论1 设 $A \in B(H)$, $\|A\| < 1$, $\alpha \in C$, $|\alpha| < 1$,则成立下述两个等价不等式

$$\| (A - \alpha I)(I - \bar{\alpha} A)^{-1} \| < 1 \tag{9}$$

$$(A^* - \bar{\alpha} I)(A - \alpha I) < (I - \alpha A^*)(I - \bar{\alpha} A) \tag{10}$$

下面,给出复分析中推广的Schwarz引理的算子形式,即定理3.

定理3 设 A 是Hilbert空间 H 上的真压缩算子, $f \in H(\Delta)$, $|f(z)| < 1 (z \in \Delta)$,使得 $f(\alpha) = 0 (|\alpha| < 1)$,则

$$\tilde{f}(A)^* \tilde{f}(A) \leq (I - \alpha A^*)^{-1} (A^* - \bar{\alpha} I)(A - \alpha I)(I - \bar{\alpha} A)^{-1} \tag{11}$$

$$\| \tilde{f}(A) \| \leq \| (A - \alpha I)(I - \bar{\alpha} A)^{-1} \| \tag{12}$$

式(11)成为严格不等式当且仅当 $A \neq \alpha I$,而且 f 不取 $\eta \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha} z}$, $\eta \in C$, $|\eta| = 1$.

以下,我们将复分析中的Dieudonne的结果转化成算子形式,得到定理4.

定理4 设 $f \in H(\Delta)$, $|f(z)| < 1 (z \in \Delta)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = \alpha$,则算子集 $\{\tilde{f}(A) : A \in B(H), \|A\| < \rho\}$ 是 $B(H)$ 关于零算子的星形集. 即对任何 $A \in B(H)$, $\|A\| < \rho$,任何 t, $0 \leq t < 1$,存在惟一的 $B \in B(H)$, $\|B\| < \rho$,使得 $\tilde{f}(B) = t\tilde{f}(A)$.

参考文献:

[1] Ky Fan. Analytic functions of a proper contraction[J]. Math Z, 1978, 160(2): 275～290.

[2] Rudin W. Functional analysis[M]. New York: McGraw-Hill, 1973.

[3] Rudin W. Real and complex analysis[M]. New York: McGraw-Hill, 1966.

[4] Halmos P R. A Hilbert space problem book[M]. New York: Springer-Verlag, 1980.

[5] Elkinani A. Holomorphic functions in Hermitian Banach algebras[J]. Proc Amer Math Soc, 1991, 111(6): 931～939.

(编辑 杜秀杰)

(上接第419页)

4 结 论

目前,网格中流水式计算的任务指派还是一个未解决的难题. 本文假设网格资源是并行系统的集合,指派一个流水线任务包括指派到哪个并行系统以及分得其中多少个处理机. 并行系统中为多任务分配处理机的问题可以按最小化任务计算成本来解决. 任务响应时间中需要引入均值估计,因为任务通信成本依赖其他相关任务的指派. X-max-min是本文提出的任务指派算法,它以任务响应时间函数为基础,可取得较高的流水线吞吐率. 仿真实验证明了该算法的有效性.

对X-max-min算法得出的任务指派进行优化是必要的. 可重复改派响应时间最大的任务,直到吞吐率不再增加为止. 通信成本显著时,还可利用任务分群,尽可能将通信需求大的一组任务指派到同一并行系统. 具体的优化方法将在以后研究.

参考文献:

[1] Choudhary A N, Narahari B, Nicol D M. Optimal processor assignment for a class of pipelined computations [J]. IEEE Trans on Parallel and Distributed Systems, 1994, 5(4): 439～445.

[2] Subhlok J, Vondran G. Optimal mapping of sequences of data parallel tasks [A]. 5th ACM SIGPLAN Symposium on Principles and Practice of Parallel Programming, Santa Barbara, USA, 1995.

[3] Frumkin M, van der Wijngaart R F. NAS grid benchmarks: A tool for grid space exploration [A]. 10th IEEE International Symposium on High Performance Distributed Computing, San Francisco, USA, 2001.

[4] Taura K, Chien A. A heuristic algorithm for mapping communicating tasks on heterogeneous resources [A]. 9th Heterogeneous Computing Workshop, Cancun, Mexico, 2000.

[5] Krishnamurti R, Ma Y E. The processor partitioning problem in special-purpose partitionable systems[A]. IEEE Conference on Parallel Processing, University Park, PA, USA, 1988.

[6] 桂小林,钱德沛,何 戈. 基于校园网络的元计算实验系统WADE的设计与实现[J]. 计算机研究与发展, 2002, 39(7): 888～894.

[7] NASA Advanced Supercomputing. NAS Parallel Benchmarks [EB/OL]. http://www.nas.nasa.gov/Software/NPB, 2002-11-19.

[8] Wolski R, Spring N, Hayes J. The network weather service: A distributed resource performance forecasting service for metacomputing [J]. Journal of Future Generation Computing Systems, 1999, 15(5/6): 757～776.

(编辑 苗 凌)

© 1995-2004 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.