

# 杆内时模型初探

张硕英, 韩福娥, 邹胜利

(西安交通大学建筑工程与力学学院, 710049, 西安)

**摘要:** 对杆内时模型在描述杆恢复力特性方面的可行性及其特点进行了初步探讨. 介绍了模型的建立过程及其数值计算方法, 并针对双弯条件下的单柱讨论了模型中截面综合内时的定义. 初步研究表明, 杆内时模型适合于反复和复合受力杆的恢复力特性描述及结构弹塑性分析, 与其他杆模型相比具有以下特点: 弹性与塑性本构方程统一; 加、卸载本构方程统一; 模型中的所有参数可由各维单一受力条件完全确定, 复合受力时则各塑性维之间自然耦合; 分析过程适用于各种材料组成的杆. 单柱在单弯和双弯条件下的算例表明, 杆内时模型在描述杆单向弯曲和双向弯曲本构特性方面是合理、可行的.

**关键词:** 杆恢复力模型; 结构弹塑性分析; 复合受力; 杆内时模型; 截面内时本构方程

**中图分类号:** TU313.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-987X(2004)03-0291-04

## Research on Member Endochronic Model

Zhang Shuoying, Han Fude, Zou Shengli

(School of Architectural Engineering and Mechanics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

**Abstract:** The feasibility and features of member endochronic model on describing the internal restoring behavior were studied. Following an introduction of the main process of establishment and corresponding numerical methods to the model, the definition of section synthetic intrinsic time for a single column under biaxial bending was discussed. The elementary research reveals that the member endochronic model is applicable to describe restoring behavior of members under reverse and compound forces and can be well applied to structure elasto-plastic analysis. This model advantages obviously over the other ones, i. e., constitutive equations of elastic and plastic conditions are identical; constitutive equations of loading and unloading are identical; all of the model parameters can be determined according to each single force condition of the member section and the coupling effect between different section plastic dimensions can be obtained spontaneously for compound forces situation; and the analysis process is available to members made of various materials. Examples of column under uniaxial and biaxial bending demonstrate that the model can give a reasonable and feasible description of member restoring behavior under the above conditions.

**Key words:** member restoring force model; structure elasto-plastic analysis; compound forces; member endochronic model; section endochronic constitutive equation

弹塑性动力分析是结构抗震理论不可缺少的组成部分, 结构力学模型主要分为层模型和杆系模型两大类. 对于杆系模型方法, 关键问题之一就是建立杆在复合受力条件下的恢复力模型. 这方面的研究始于 20 世纪 60 年代末期, 代表性的模型主要有比拟塑性力学模型<sup>[1]</sup> (又称杆件塑性力学模型) 和柱

端并联弹簧模型<sup>[2]</sup>, 它们迄今仍是结构在多维地震作用下的弹塑性分析中主要采用的两种模型<sup>[3,4]</sup>. 这两种模型都以杆端发生塑性为假定, 前者在截面强化规则和塑性流动规则方面假定较多, 后者则只适用于钢筋混凝土杆. 20 世纪 70 年代以来, 材料内时塑性理论在金属、混凝土、岩土等众多材料本构领

域内得到了广泛应用,是材料无屈服面理论的主要代表<sup>[5,6]</sup>.杆内时模型是内时思想方法与杆有限元法的有机结合,充分体现了内时模型对多种材料的适用性及其在处理复合受力、循环和反复受力问题方面的独到之处.

## 1 杆内时模型的建立

### 1.1 截面内时本构方程

连续介质不可逆热力学引入“宏观无限小”,目的是使得关于微系统(局域)具有均匀的热力学状态的假设对场的数学分析造成的误差可以忽略不计.考虑杆的几何特点,此处以杆微段为局域,并取杆在各截面处的变形(即轴向线应变、双向剪切应变、扭曲率、双向弯曲率)和内力(即轴力、双向剪力、扭矩、双向弯矩)作为热力学状态变量,同时采用平截面假定,即刚性截面假定.结构力学的基本理论已证明,上述这两组变形和内力中各对应项的乘积即构成杆微段的应变能,因此不难看出,这一模型仍然能达到“宏观无限小”,使得具有均匀的热力学状态;达到“微观无限大”,使得具有足够多的粒子,从而满足经典热力学一贯要求的统计平均性质.继而在后面的研究中,只需将截面变形与材料中一点的应变对应,将截面内力与材料中一点的应力对应,即可按照与材料内时本构方程建立过程相类似的方法,推导出截面内时本构方程.限于篇幅,本文对这部分内容不做详细介绍,只给出由此得到的截面综合内时本构方程

$$X_i(z) = \int_0^z \mu_i(z-z) \frac{\partial x_i^p}{\partial z} dz \quad (1a)$$

$$\mu_i(z) = \frac{k_{0i}}{1-k_i} e^{-\left(\frac{1-k_i}{1-k_i}\right)z} + k_{1i} e^{-1z}, \quad 0 \leq k_i < 1 \quad (1b)$$

式中: $i=1,2,\dots,6$ (本文公式中重复下标*i*不求和),代表截面轴向、双剪、扭转、双弯6维; $X$ 为杆截面内力向量,诸分量依次为各截面处的轴力、双向剪力、扭矩、双向弯矩; $x$ 为截面变形向量,诸分量依次为各截面处的轴向线应变、双向剪切应变、扭曲率、双向弯曲率; $x^p$ 为拟塑性变形向量,定义为

$$dx_i^p = dx_i - \frac{k_i}{k_{0i}} dX_i(z) \quad (2)$$

式中: $z$ 为截面综合内时标度,是对截面塑性程度的综合度量.对于截面一维问题, $z$ 通常定义为

$$dz = f(z) d; d = |dx^p| \quad (3)$$

式中: $d$ 为截面综合内时量度; $f(z)$ 为强化函数,通

常取 $f(z) = e^{-z}$ .复合受力条件下则通过 $z$ 来反映截面各维的塑性耦合作用.

以上各式中的 $k_i, k_{0i}, k_{1i}, \mu_i$ 及强化函数中的 $f$ 合称为截面内时模型参数.根据截面综合内时模型应满足截面各维单一受力特例的基本原则,分别按截面各维单一受力(如纯拉压、纯弯等)条件下内力-变形(如轴力-轴向应变、弯矩-曲率等)的实际单调加载关系曲线来确定上述参数.具体确定时,可以采用近似试凑的方法,也可采用具有一定误差要求的曲线拟合的方法.截面各维各自的实际单调加载关系曲线可根据有关构件理论进行计算得到,例如钢筋混凝土杆截面可根据钢筋混凝土构件理论,钢杆截面可根据钢结构理论等.

将式(1a)对 $z$ 求导,并将式(2)代入,得截面综合内时本构方程的增量形式

$$dX_i = D_i dx_i + E_i \mu_i(z) dz \quad (4a)$$

$$\mu_i(z) = \int_0^z \frac{\partial \mu_i}{\partial z}(z-z) \frac{dx_i^p}{dz} dz \quad (4b)$$

$$D_i = E_i \mu_i(0) \quad (4c)$$

$$E_i = 1/[1 + (k_i/k_{0i}) \mu_i(0)] \quad (4d)$$

### 1.2 杆内时模型

以小变形等截面直杆为研究对象,且假定杆剪切应变很小而忽略不计.取杆轴线为 $x$ 轴,记 $g, e$ 分别为杆任意截面的位移和杆单元节点位移, $R^e$ 为杆等效节点力,并将截面变形和相应截面内力分别记为 $e$ (4个分量为轴向线应变、扭曲率、双向弯曲率)和 $F$ (4个分量为轴力、扭矩、双向弯矩),则根据杆有限元理论有

$$g = N^e \quad (5)$$

$$e = B^e \quad (6)$$

$$R^e = \int_0^L B^T F dx \quad (7)$$

式中: $N$ 为形函数矩阵,与一般杆有限元中的形函数矩阵相同; $B$ 为应变矩阵,其元素易根据 $e$ 的定义和式(5)、式(6)推得.采用上述符号后式(4)可改记为

$$dF = \hat{D} de + dF^p \quad (8a)$$

$$dF_i^p = E_i \mu_i(z) dz, \quad i = 1, 4, 5, 6 \quad (8b)$$

式中: $\hat{D}$ 是式(4c)去掉两个剪切应变项之后组成的对角阵,为常数矩阵,称为截面初始刚度矩阵.将式(8)代入式(7),并考虑式(6),得增量形式的杆单元内时本构方程

$$dR^e = K^e d^e + dP^e \quad (9a)$$

$$K^e = \int_0^L B^T \hat{D} B dx \quad (9b)$$

$$dP^e = \int_0^L B^T dF^p dx \quad (9c)$$

式中:  $K^e$ 、 $dP^e$  分别为杆单元初始刚度矩阵和节点塑性力增量。

如果式(8a)可以表示为

$$dF = Dde \quad (10)$$

式中  $D$  是截面切线刚度矩阵, 则将式(10)代入式(7)可得杆单元内时本构方程的另一种形式

$$dR^e = \overline{K}^e d^e \quad (11a)$$

$$\text{式中} \quad \overline{K}^e = \int_0^L B^T(x) D(x) B(x) dx \quad (11b)$$

为杆单元切线刚度矩阵。

### 2 结构弹塑性分析的数值计算方法

在式(9)或式(11)的基础上, 按照杆系结构力学易于得到结构初始刚度矩阵  $K$ 、总节点位移增量  $d$ 、总节点荷载增量  $dR$ 、总节点塑性力增量  $dP$  以及结构切线刚度矩阵  $\overline{K}$ , 它们构成如下关系

$$dR = Kd + dP \quad (12)$$

或

$$dR = \overline{K}d \quad (13)$$

据此可进行结构弹塑性分析或 Push-over 分析。分析时可采用通常的非线性问题的求解方法, 如增量切线刚度法、增量初内力法、增量初变形法等。各种具体迭代方法可参考相应的杆弹塑性有限单元方法进行, 此处不再赘述。

与通常的杆有限单元法求解杆系弹塑性问题不同的是, 物理方程式(8)、式(10)对于加载和卸载是统一的, 进入塑性的过程也是逐渐的, 因此不存在所谓的弹、塑性过渡区域问题及折点处理问题, 程序的编制可以大为简化。

### 3 柱单向弯曲问题

考察图 1 所示的杆单向弯曲问题(文献[7]中的柱 C-1)。由于忽略杆的剪切应变, 在  $x_i$  中只有单向弯曲率  $x_5 = y'' = 0$ 。根据实验得到的截面弯矩-曲率曲线, 按试错法确定的截面内时模型参数为:  $k = 0.6, k_0 = 4\ 400, k_1 = 50, \theta_0 = 80, \theta_1 = 1, \theta_2 = -3$ 。采用按位移加载的增量切线刚度法计算。在迭代过程中, 需要根据截面内时本构方程(1)及内时定义式(3), 由截面变形增量  $de$  (即截面曲率增量  $dx_5 = d\theta$ ) 求截面综合内时增量  $dZ$  和内力增量  $dF$  (即截面弯矩增量  $dX_5 = dM_y$ ), 这可以按照相关的材料内时理论, 通过引入中间变量的方法进行计算[6], 以

减小数值计算的误差。

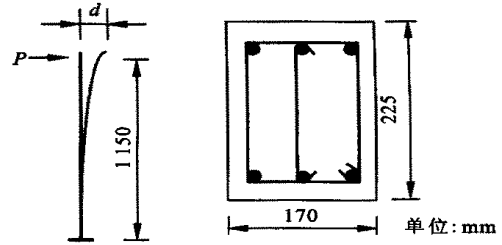


图 1 单向弯曲柱 C-1[7]

实验与理论计算的荷载  $P$ -侧移  $\Delta$  曲线绘于图 2。由图可见, 只要按照实际的截面本构关系确定截面内时参数并按照本文方法进行数值计算, 杆内时模型可与实际吻合较好。

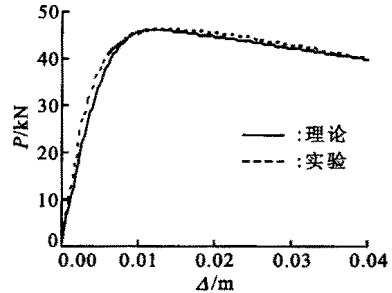


图 2 荷载-侧移曲线

图 3 为按照增量切线刚度法编制的程序得到的该柱在反复荷载下的  $P$ - $\Delta$  曲线, 可见与式(1)的含多指数核函数的截面内时本构方程对应的滞回曲线为梭形形式, 较适合于描述杆截面的受弯特性。

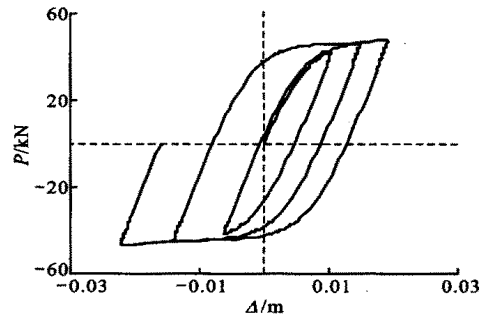


图 3 反复荷载下的荷载-侧移曲线

### 4 截面综合内时本构方程及其数值求解

下面关于杆截面复合受力条件下杆内时模型的讨论, 仅就建筑结构中常见的杆双向弯曲问题加以展开, 且截面内时本构方程按照截面综合内时模型建立。

#### 4.1 截面综合内时定义

材料内时理论指出, 屈服面存在的本构特征是作为材料内时模型的特例存在的[5]。相应地, 杆件

塑性力学模型<sup>[1]</sup>中描述的截面本构特性也是作为截面内时模型的特例存在的. 因此, 参考截面实际屈服面方程来定义内时是合理而有效的. 关于钢筋混凝土构件的研究表明, 杆双向受弯时的截面初始屈服条件大多可表达为

$$(M_y/M_{y0})^2 + (M_z/M_{z0})^2 = 1 \quad (14)$$

从屈服面作为特例存在的证明过程中不难发现, 对于杆双弯问题, 采用以下的截面综合内时定义是与上式相符合的

$$d = [ (dx_5^p)^2 + (dx_6^p)^2 ]^{1/2} = f(z) dz \quad (15a)$$

$$dx_5^p = dx_5 - (k_5/k_{05}) dX_5 \quad (15b)$$

$$dx_6^p = dx_6 - (k_6/k_{06}) dX_6 \quad (15c)$$

### 4.2 截面综合内时本构方程显式

对于式(4), 采用引入中间变量的方法, 并考虑式(2), 可以得到截面综合内时本构方程的显式为

$$\left. \begin{aligned} k_{05} (X_5 - r_5) dz + dX_5 + (k_5 - 1) dr_5 - k_{05} dx_5 &= 0 \\ k_{05} r_5 dz + k_5 k_{15} dX_5 + k_{05} dr_5 - k_{05} k_{15} dx_5 &= 0 \\ k_{06} (X_6 - r_6) dz + dX_6 + (k_6 - 1) dr_6 - k_{06} dx_6 &= 0 \\ k_{06} r_6 dz + k_6 k_{16} dX_6 + k_{06} dr_6 - k_{06} k_{16} dx_6 &= 0 \\ f(z) dz = [ (dx_5 - \frac{dX_5}{k_{05}})^2 + (dx_6 - \frac{dX_6}{k_{06}})^2 ]^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式中:  $X_5, X_6$  为杆双向弯矩;  $x_5, x_6$  为截面双向弯曲率;  $r_5, r_6$  是引入的中间变量; 其他符号为截面内时模型参数, 在进行计算前需按两个单弯问题根据本文前述方法事先确定.

式(16)共 5 个方程, 可以由已知的  $dx_5, dx_6$  解出  $dz, dX_5, dX_6, dr_5, dr_6$ , 或由已知的  $dX_5, dX_6$  解出  $dz, dx_5, dx_6, dr_5, dr_6$ .

### 4.3 截面综合本构方程的数值求解方法

在采用增量初内力法进行结构数值计算过程中, 需要由已知的  $dx_5, dx_6$  从式(16)中解出  $dz, dX_5, dX_6, dr_5, dr_6$ . 因最后一式为非线性形式, 故需按非线性代数方程组的数值解法求解, 相应各维独立受力时的解可以作为初值. 为了简化数值计算, 减小误差, 提高数值计算的可靠性, 首先在前 4 式中消去  $dr_5, dr_6$ , 再将最后一式代入, 得到关于  $dX_5, dX_6$  的非线性微分方程组, 据此求出  $dX_5, dX_6$  后再依次回代得到  $dz$  和  $dr_5, dr_6$ .

## 5 双向弯曲塑性耦合效果

为了讨论杆内时模型所反映的双向弯曲塑性耦合效果, 作为举例, 考察虚拟柱: 柱高 4 m; 截面绕  $y$

轴单弯的内时模型参数为  $k=0.5, k_0=54\ 390, k_1=50, \theta_0=300, \theta_1=20, \theta_2=0$ ; 绕  $z$  轴单弯的内时模型参数为  $k=0.5, k_1=50, \theta_0=260, \theta_1=20, \theta_2=0$ ; 底端为固定支座, 顶端为滑动支座, 顶端作用水平力  $P$ , 其双向分量为  $P_y, P_z$ . 即有

$$\left. \begin{aligned} P_y &= P \cos \theta \\ P_z &= P \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

为常数, 单弯时  $\theta$  为  $0$  或  $90^\circ$ , 双弯时  $0^\circ < \theta < 90^\circ$ .

对于  $y$  向与  $z$  向单弯的情况, 侧移分别达  $d_y = 0.036\text{ m}, d_z = 0.03\text{ m}$  时 (塑性明显时) 计算得到的荷载值分别为  $P_y^0 = 94\text{ kN}$  和  $P_z^0 = 108\text{ kN}$ . 对  $\theta = 60^\circ$  的双弯情况, 计算得到  $y$  向与  $z$  向侧移达上述相同值时的荷载分量为  $P_y = 53\text{ kN}, P_z = 94\text{ kN}$ . 二者存在如下关系

$$\left( \frac{P_y}{P_y^0} \right)^2 + \left( \frac{P_z}{P_z^0} \right)^2 = 1, \quad \theta = 1.075 \quad (18)$$

即塑性明显时双向耦合基本遵循椭圆曲线. 当塑性不明显时, 选取的侧移  $d_y$  和  $d_z$  越小 (即塑性越不明显), 所得上述关系中的  $\theta$  值会比 1 大得越多, 反映了本模型对塑性逐渐过渡的描述.

由于截面弯矩和柱顶荷载存在关系  $M = P(l - L/2)$  ( $l$  是截面到柱顶的距离), 因此上述塑性耦合作用表达式(18)对于截面弯矩也适用. 这说明, 本文的截面综合内时模型描述的截面塑性特性与钢筋混凝土截面的屈服条件式(14)相一致, 亦可见内时定义式(15)的正确性.

## 6 结 语

本文关于杆内时模型的初步研究结果如下.

(1) 与现有其他杆恢复力模型相比, 杆内时模型具有如下特点: 弹性到塑性逐渐过渡; 不仅弹性与塑性的本构方程统一, 加、卸载本构方程亦统一, 给杆反复受力的编程分析带来很大方便;

(2) 杆内时模型中的所有参数可由各维单一受力条件完全确定, 复合受力时可达各塑性维之间的自然耦合, 从而使杆复合受力分析简便易行, 而这一分析过程对于各种材料组成的杆又都适用. 由此可见, 作为一种新型的杆复合受力恢复力模型, 杆内时模型在结构弹塑性动力分析方面具有广阔的应用前景.

诚然, 本文的研究只是初步论证了杆内时模型在描述杆恢复力特性方面的可行性, 对于该模型在杆各种复合受力条件下适用的可靠性等问题, 尚需利用实验数据进行广泛而深入的探讨.

(下转第 316 页)



$$\frac{e^{-i(t-\tau)}}{k_0^2 - k_{m,n,l}^2} d \quad (13)$$

令

$$H(y, x) =$$

$$\frac{1}{2} \sum_{m,n,l} \frac{J_m(k_{m,n,l}r) J_m(k_{m,n,l}r) e^{-i m(\cdot)} \cos \frac{L}{L} z \cos \frac{L}{L} z}{m, n, l}$$

则有

$$G = \sum_{m,n,l} H(y, x) \frac{e^{-i(t-\tau)}}{k_0^2 - k_{m,n,l}^2} d \quad (14)$$

若取叶片表面的外法线为正,将方程(14)代入方程(5)可求得

$$p(x, t) = \sum_s \frac{\partial f_i}{\partial y_{i,m,n,l}} H(y, x) \frac{e^{-i(t-\tau)}}{k_0^2 - k_{m,n,l}^2} d \, dS(y) \, d + \sum_v \nabla \cdot [(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})] \sum_{m,n,l} H(y, x) \frac{e^{-i(t-\tau)}}{k_0^2 - k_{m,n,l}^2} d \, dy \, d \quad (15)$$

方程(15)即为蜗壳内部气动声场的时域理论解公式。

## 5 总结

本文以 Lighthill 声模拟理论和 Powell-Howe 涡声理论为基础建立了一种用于分析离心风机气动噪声的理论模型。首先,推导了离心叶轮三维气动声学的基本方程。然后,忽略蜗壳进、出口声学软边界的影响,将蜗壳简化为一个封闭的声学硬边界柱壳并推出了柱壳腔体内的格林函数。最后,利用该函数对

离心风机内部由旋转叶轮产生的气动声场进行了时域求解,并给出了理论解方程。

本文模型的理论解不仅包含偶极子源,还包含四极子源,因此利用本文模型计算的离心风机气动噪声不仅包含旋转噪声,还包含涡流噪声。进行气动噪声计算时,首先要计算出离心风机内部的三维非稳定流场,然后利用本文模型和理论解方程求出与该流场相对应的气动声场。

## 参考文献:

- [1] Neise W. Review of noise reduction methods for centrifugal fans [J]. ASME Journal of Engineering for Industry, 1982, 104(2): 151 ~ 161.
- [2] Jeon W H, Lee D J. An Analysis of the flow and aerodynamic acoustic source of a centrifugal Impeller [J]. Journal of Sound and Vibration, 1999, 222(2): 505 ~ 511.
- [3] Lowson M V. The sound field for singularities in motion [A]. Proceedings of the Royal Society [C]. London: the Royal Society, 1965. 559 ~ 572.
- [4] 陆桂林, 翟冬青. 离心风机气动噪声声压级的理论估算方法 [A]. 钟芳源. 节能低噪轴流/离心风机论文集 [C]. 北京:机械工业出版社, 1994. 181 ~ 191.
- [5] Lighthill M J. On sound generated aerodynamically [A]. Proceedings of the Royal Society [C]. London: the Royal Society, 1952. 564 ~ 587.
- [6] Howe M S. Contributions to the theory of aerodynamic sound, with application to excess jet noise and the theory of the flute [J]. J Fluid Mech, 1975, 71(4): 625 ~ 673.

(编辑 王焕雪)

(上接第 294 页)

## 参考文献:

- [1] Nigam N C. Yielding in framed structures under dynamic loads [J]. ASCE J Engng Mech Div, 1970, 96(5): 687 ~ 709.
- [2] Lai S S, Will G T, Otani S. Model for inelastic biaxial bending of concrete members [J]. ASCE J Struc Engng Div, 1984, 110(11): 2 563 ~ 2 584.
- [3] Jiang Y, Saiidi M. Four-spring element for cyclic response of R/C columns [J]. ASCE J Struc Engng Div, 1990, 116(4): 1 018 ~ 1 029.

- [4] 李康宁, 洪亮. 结构三维弹塑性分析方法及计算机程序 CANNY [J]. 四川建筑科学研究, 2001, 27(4): 1 ~ 6.
- [5] 范镜泓. 内蕴时间塑性理论及其新进展(上) [J]. 力学进展, 1985, 15(3): 273 ~ 290.
- [6] 范镜泓. 内蕴时间塑性理论及其新进展(下) [J]. 力学进展, 1985, 15(4): 443 ~ 457.
- [7] 李斌. 钢筋混凝土框支剪力墙结构抗震性能的研究 [D]. 西安:西安冶金建筑学院建筑工程系, 1988.

(编辑 葛赵青)