

混合边界条件下的定常旋转 Navier-Stokes 方程

苏 剑, 李开泰

(西安交通大学理学院, 710049, 西安)

摘要: 在混合边界条件下, 研究了二维和三维放置通道内的定常不可压缩黏性流体所满足的 Navier-Stokes 方程的适定性问题, 根据流体在进出口的能量流量的某种有界性假设, 得到了旋转 Navier-Stokes 方程在混合边界条件下的解的先验估计, 并运用压缩映射、不动点原理和紧性定理, 证明了其解的存在性、惟一性。

关键词: 旋转 Navier-Stokes 方程; 混合边界; 存在性; 惟一性

中图分类号: O175.29 文献标识码: A 文章编号: 0253-987X(2006)02-0231-04

Stationary Rotating Navier-Stokes Equations with Mixed Boundary Conditions

Su Jian, Li Kaitai

(School of Sciences, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: Two and three dimensional stationary rotating Navier-Stokes equations with mixed boundary conditions were studied. The prior estimate of the corresponding solution was obtained under the assumption of bounded energy flow in the inlet and outlet. Employing fixed point theory and compactness theory, the existence and uniqueness of the solution were proved with the compress mapping.

Keywords: rotating Navier-Stokes equation; mixed boundary condition; existence; uniqueness

流体流经通道时通常满足混合边界条件^[1-3], 而当通道以一定的角速度绕固定轴旋转时, 流体流动满足的方程为旋转 Navier-Stokes 方程, 如叶轮机械内部流体的流动等^[4]. 众所周知, 对于 Dirichlet 边界条件下的定常 Navier-Stokes 方程, 至少存在一个解, 并且在适当条件下解是惟一的^[5]. 当惟一性被破坏时, 可能出现多解现象而丧失稳定性^[4]. 但是, 对于混合边界条件下的 Navier-Stokes 方程, 由于不能够控制边界上的能量流量, 因此弱解的存在性尚未得到完全解决. 在忽略体积力作用的情况下, 文献^[3]证明了当进出口压力适当小时, 定常的 Navier-Stokes 方程解存在. 文献^[6]中假设区域 Ω 有界, u 在进出口满足某种条件, 即假设存在某个小的正常数 c_0 ($\approx O(\nu^\alpha)$), 使得条件

$$\int_{\Gamma_1} |(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_-|^\alpha dS \leq c_0$$

$$2 < \alpha < 4, (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_- = \max\{0, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\} \quad (1)$$

满足时, 对于混合边界条件下的定常 Navier-Stokes 方程, 证明了弱解的存在.

本文利用压缩映射、不动点原理以及紧性定理的方法, 证明了当外力足够小或者黏性 ν 足够大时, 混合边界条件下的旋转 Navier-Stokes 方程弱解存在. 对于式(1), 本文证明了当 $\alpha=2$ 时, 解仍然存在, 改进了文献^[6]的结果, 并且证明了解的惟一性.

1 旋转通道内的 Navier-Stokes 方程

旋转通道内的定常不可压缩黏性流体在混合边界条件下所满足的 Navier-Stokes 方程定解问题为

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - 2\nu \cdot \nabla \mathbf{e}(\mathbf{u}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} && \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 && \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ \mathbf{u} &= 0 && \text{在 } \Gamma_0 \text{ 上} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{g} && \text{在 } \Gamma_1 \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中: $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n=2,3)$ 为有界区域, 其边界 $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, Γ_0 为通道固壁, Γ_1 为进出口; $\boldsymbol{\omega}$ 是通道旋转的角速度; \mathbf{u} 是流体与旋转坐标系的相对速度; ν 为黏性系数; p 是压力; 变形速率张量 $\mathbf{e}(\mathbf{u})$ 、应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 如下

$$\mathbf{e}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T), \quad \boldsymbol{\sigma} = p\mathbf{I} + 2\nu \mathbf{e}(\mathbf{u}) \quad (3)$$

引入记号 $E(\bar{\Omega}) = \{\mathbf{v} \in [C^\infty(\bar{\Omega})]^3, \mathbf{v}|_{\Gamma_0} = 0\}$, $E_0(\bar{\Omega}) = \{\mathbf{v} \in [C^\infty(\bar{\Omega})]^3, \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ in } \Omega, \mathbf{v}|_{\Gamma_0} = 0\}$. $E(\bar{\Omega})$ 在 $[H^1(\Omega)]^3$ 和 $[L^2(\Omega)]^3$ 中的闭包分别记为 $V(\Omega)$ 和 $X(\Omega)$, $E_0(\bar{\Omega})$ 在 $[H^1(\Omega)]^3$ 和 $[L^2(\Omega)]^3$ 中的闭包分别记为 $V_0(\Omega)$ 和 $X_0(\Omega)$. 双线性形式 $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2\nu \int_{\Omega} e^{ij}(\mathbf{u})e_{ij}(\mathbf{v})dx + \int_{\Omega} 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}dx$, $b(\mathbf{v}, q) = -\int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{v}dx$, 三线性形式 $a_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}dx$, 以及 $\langle \mathbf{F}, \mathbf{v} \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}dx + \int_{\Gamma_1} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}ds$, 则有如下引理 1.

引理 1 若 $\mathbf{f} \in V'_0(\Omega)$, $\mathbf{g} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, 则 $\mathbf{F} \in V'_0(\Omega)$, 且

$$\|\mathbf{F}\|_* \leq \|\mathbf{f}\|_* + \|\mathbf{g}\|_{-\frac{1}{2}, \Gamma_1} \quad (4)$$

根据 $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = 0$ 以及 Korn 不等式 $\|\mathbf{u}\|_1^2 \leq C_1 \int_{\Omega} e^{ij}(\mathbf{u})e_{ij}(\mathbf{u})d\Omega$, 不难得到引理 2.

引理 2 设 Ω 为 Lipschitz 连续区域, $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$, 且 $\Gamma_0 \neq \emptyset$, 那么存在一个正常数 C_1 , 使得

$$\nu C_1 \|\mathbf{v}\|_1^2 \leq a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega) \quad (5)$$

引理 3 存在正常数 β , 使得如下 inf-sup 条件成立

$$\inf_{q \in L^2(\Omega)} \sup_{\mathbf{v} \in V(\Omega)} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_1 \|q\|_0} \geq \beta \quad (6)$$

2 解的存在惟一性

本节主要讨论式(2)解的存在惟一性. 式(2)解的(P)问题是

$$\left. \begin{aligned} \text{求 } \mathbf{u} \in V_0(\Omega), \text{ 使得} \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + a_1(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{F}, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in V_0(\Omega) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

令 $\langle S(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{F}, \mathbf{v} \rangle - a_1(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$, 则由 Hölder 不等式和 Sobolev 嵌入定理 $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$, 可以推出 $\|S(\mathbf{u})\|_* \leq \|\mathbf{F}\|_* + C_2 \|\mathbf{u}\|_1^2$, 并且容易得到如下引理 4.

引理 4 映射 $\mathbf{u} \rightarrow S(\mathbf{u})$ 为 $V_0 \rightarrow V'_0$ 上的 Lipschitz 连续映射

$$\|S(\mathbf{u}_1) - S(\mathbf{u}_2)\|_* \leq C_2 (\|\mathbf{u}_1\|_1 + \|\mathbf{u}_2\|_1) \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_1 \quad (8)$$

定义映射 T : 给定任一 $\mathbf{u} \in V_0$, 求 $\mathbf{w} \in V_0$, 使得

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \langle S(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in V_0 \quad (9)$$

根据 Lax-Milgram 定理知上式存在惟一解 \mathbf{w} , 它依赖于 \mathbf{u} , 记作 $\mathbf{w} = T(\mathbf{u})$. 式(9)确定了一个从 V_0 到 V_0 的映射 T , 并且满足

$$\|T(\mathbf{u})\|_1 \leq \frac{1}{C_1 \nu} \|S(\mathbf{u})\|_* \leq \frac{1}{C_1 \nu} (\|\mathbf{F}\|_* + C_2 \|\mathbf{u}\|_1^2) \quad \forall \mathbf{u} \in V_0 \quad (10)$$

进一步可以证明, T 也是 Lipschitz 连续映射.

引理 5 设 Ω 为有界区域, $\partial\Omega$ 为 Lipschitz 边界, 则 T 为 $V_0 \rightarrow V'_0$ 上的 Lipschitz 连续映射

$$\|T(\mathbf{u}_1) - T(\mathbf{u}_2)\|_1 \leq \frac{C_2}{C_1 \nu} (\|\mathbf{u}_1\|_1 + \|\mathbf{u}_2\|_1) \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_1 \quad (11)$$

定理 1 若 $\mathbf{F} \in V'_0$, 且满足 $\|\mathbf{F}\|_* < \frac{C_1^2 \nu^2}{4C_2}$, 则式(7)

在球 $B = \{\mathbf{u} | \mathbf{u} \in V_0, \|\mathbf{u}\|_1 \leq \frac{2}{C_1 \nu} \|\mathbf{F}\|_*\}$ 内存在惟一解 \mathbf{w} .

证明 $\forall \mathbf{u} \in B$, 根据式(10)以及条件 $\|\mathbf{F}\|_* < \frac{C_1^2 \nu^2}{4C_2}$, 有

$$\|T\mathbf{u}\|_1 \leq \frac{1}{C_1 \nu} (\|\mathbf{F}\|_* + C_2 \|\mathbf{u}\|_1^2) \leq$$

$$\frac{1}{C_1 \nu} (\|\mathbf{F}\|_* + \frac{4C_2}{C_1^2 \nu^2} \|\mathbf{F}\|_*^2) \leq \frac{2}{C_1 \nu} \|\mathbf{F}\|_*$$

故 $T: B \rightarrow B$. 又 $\forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in B$, 根据式(11)有

$$\|T(\mathbf{u}_1) - T(\mathbf{u}_2)\|_1 \leq$$

$$\frac{C_2}{C_1 \nu} (\|\mathbf{u}_1\|_1 + \|\mathbf{u}_2\|_1) \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_1 \leq$$

$$\frac{4C_2}{C_1^2 \nu^2} \|\mathbf{F}\|_* \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_*$$

而

$$\frac{4C_2}{C_1^2 \nu^2} \|\mathbf{F}\|_* < 1$$

故 T 为 $B \rightarrow B$ 上的压缩映射, T 在 B 上存在惟一不动点 $\mathbf{w} = T(\mathbf{w})$, 则 \mathbf{w} 为式(7)的解.

定理 1 表明,当定解数据 f, g 适当小,或者黏性适当大时,式(7)在球 B 内存在惟一弱解,但是并不能说明在球外不存在解,即不能保证式(7)解的惟一性.

下面,对三线性项作更精细的估计,利用 Gaussian 定理以及边界条件可得

$$|a_1(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u})| = \left| \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} |\mathbf{u}|^2 ds \right| \leq \begin{cases} C \|\mathbf{u}\|_0^{\frac{5}{4}} \|\nabla \mathbf{u}\|_0^{\frac{7}{4}} & \text{若 } n = 2 \\ C \|\mathbf{u}\|_0 \|\nabla \mathbf{u}\|_0^2 & \text{若 } n = 2, 3 \end{cases}$$

而由 Hölder 不等式和 Sobolev 嵌入定理 $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\partial\Omega) (n=2, 3)$, 可以得到

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_1} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) |\mathbf{u}|^2 ds \right| &\leq \left[\int_{\Gamma_1} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^2 ds \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\int_{\Gamma_1} |\mathbf{u}|^4 ds \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_3 \left[\int_{\Gamma_1} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^2 ds \right]^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}\|_1^2 \end{aligned} \quad (12)$$

由式(7)、引理 2、式(12)及 $\frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) |\mathbf{u}|^2 ds \leq a_1(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u})$ 得

$$\left(\nu C_1 - \frac{1}{2} C_3 \left[\int_{\Gamma_1} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^2 ds \right]^{\frac{1}{2}} \right) \|\mathbf{u}\|_1 \leq \|\mathbf{F}\|_* \quad (13)$$

因此,若存在 $C_0 > 0$, 使得 $\int_{\Gamma_1} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^2 ds \leq C_0 \leq \left(\frac{2C_1\nu}{C_3}\right)^2$ 时

$$\|\mathbf{u}\|_1 \leq \frac{1}{\nu C_1 - \frac{1}{2} C_3 C_0^{\frac{1}{2}}} \|\mathbf{F}\|_*$$

所以我们证明了引理 6.

引理 6 设 $\Omega \subset R^n (n=2, 3)$ 为 Lipschitz 连续区域, $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$, 且 $\Gamma_0 \neq \emptyset$, $\mathbf{f} \in V'_0(\Omega)$, $\mathbf{g} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, 且存在 C_0 , 使得 $\int_{\Gamma_1} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^2 ds \leq C_0 \leq \left(\frac{2C_1\nu}{C_3}\right)^2$ 成立, 则如果式(2)存在弱解, 则它满足

$$\|\mathbf{u}\|_1 \leq \frac{1}{\nu C_1 - \frac{1}{2} C_3 C_0^{\frac{1}{2}}} \|\mathbf{F}\|_* \quad (14)$$

定理 2 在引理 6 的条件下, 式(2)至少存在一个解.

证明 设 $a_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + a_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$, 根据条件 $\int_{\Gamma_1} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^2 ds \leq C_0 \leq \left(\frac{2C_1\nu}{C_3}\right)^2$, 由前面的推导可以得到

$$a_0(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) = a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + a_1(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq \left(\nu C_1 - \frac{1}{2} C_3 C_0^{\frac{1}{2}} \right) \|\mathbf{u}\|^2 \quad (15)$$

又由 $C_0 < \left(\frac{2C_1\nu}{C_3}\right)^2$, 可得 $\nu C_1 - \frac{1}{2} C_3 C_0^{\frac{1}{2}} > 0$, 即三线性形式 $a_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ 满足强制性.

设 $\{\mathbf{u}_m\}$ 在 $V_0(\Omega)$ 中弱收敛于 \mathbf{u} ; $\mathbf{u}_m \rightharpoonup \mathbf{u}$, 则有 $\{\mathbf{u}_m\}$ 在 $V_0(\Omega)$ 中有界. 又由于 $V_0(\Omega)$ 紧嵌入 $L^2(\Omega)$, 故 $\{\mathbf{u}_m\}$ 在 $L^2(\Omega)$ 强收敛于 \mathbf{u} . $\forall \mathbf{v} \in E_0(\bar{\Omega})$, 有

$$a_0(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}) - a_0(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{u}_m - \mathbf{u}, \mathbf{v}) + a_1(\mathbf{u}_m - \mathbf{u}, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}) - a_1(\mathbf{u}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_m, \mathbf{v})$$

因为 $\{\mathbf{u}_m\}$ 在 $V_0(\Omega)$ 弱收敛于 \mathbf{u} , 故当 $m \rightarrow +\infty$ 时, $a(\mathbf{u}_m - \mathbf{u}, \mathbf{v}) \rightarrow 0$. 由 $V_0(\Omega)$ 紧嵌入 $L^4(\Omega)$, 可得 $\{\mathbf{u}_m\}$ 在 $L^4(\Omega)$ 中强收敛于 \mathbf{u} , 又 V_0 紧嵌入 $L^2(\Gamma_1)$, 故 $\{\mathbf{u}_m\}$ 在 $L^2(\Gamma_1)$ 中强收敛于 \mathbf{u} , 再根据 Hölder 不等式, 以及 $\{\mathbf{u}_m\}$ 在 $V_0(\Omega)$ 中一致有界, 可以得到 $\forall \mathbf{v} \in V_0$, 当 $m \rightarrow +\infty$ 时, $a_1(\mathbf{u}_m - \mathbf{u}, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}) \rightarrow 0$, $a_1(\mathbf{u}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_m, \mathbf{v}) \rightarrow 0$. 因此

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} a_0(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}) = a_0(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in E_0(\bar{\Omega}) \quad (16)$$

又由于 $E_0(\bar{\Omega})$ 在 V_0 中稠密, 所以上述结论对 $\forall \mathbf{v} \in V_0$ 也成立, 即映射 $\mathbf{u} \rightarrow (a_0(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}))$ 在 V_0 中是弱连续的. 因此, 根据文献[5]中定理 5.4.3 知式(2)的弱解存在.

首先, 引入 Stokes 算子 A 为 $(A\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} e^{ij}(\mathbf{u}) e_{ij}(\mathbf{v}) dx$, $\forall \mathbf{w} \in D(A)$, 则有如下不等式成立^[3]

$$\|\mathbf{w}\|_{\infty} = \begin{cases} C_7 w_0^{\frac{1}{2}} \|A\mathbf{w}\|_0^{\frac{1}{2}} & \text{若 } n = 2 \\ C_8 \|\nabla \mathbf{w}\|_0^{\frac{1}{2}} \|A\mathbf{w}\|_0^{\frac{1}{2}} & \text{若 } n = 2, 3 \end{cases} \quad (17)$$

$$\|\nabla \mathbf{w}\|_0 \leq C_9 \|A\mathbf{w}\|_0 \quad \text{若 } n = 2, 3$$

若式(7)有

$$a(\mathbf{u}, A\mathbf{u}) + a_1(\mathbf{u}, \mathbf{u}, A\mathbf{u}) = \langle \mathbf{F}, A\mathbf{u} \rangle \quad (18)$$

即

$$\begin{aligned} \nu(A\mathbf{u}, A\mathbf{u}) + \int_{\Omega} 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) \cdot A\mathbf{u} dx + a_1(\mathbf{u}, \mathbf{u}, A\mathbf{u}) &= \langle \mathbf{F}, A\mathbf{u} \rangle \end{aligned} \quad (19)$$

根据式(17), 可得

$$a_1(\mathbf{u}, \mathbf{u}, A\mathbf{u}) \leq \|\mathbf{u}\|_{\infty} \|\nabla \mathbf{u}\|_0 \|A\mathbf{u}\|_0 \leq C_8 \|\nabla \mathbf{u}\|_0^{\frac{3}{2}} \|A\mathbf{u}\|_0^{\frac{3}{2}} \quad (20)$$

所以有

$$\nu \|Au\|_0 \leq C_8 \|\nabla u\|_0^{\frac{3}{2}} \|Au\|_0^{\frac{1}{2}} + (C_{10} \|u\|_0 + \|F\|_*) \quad (21)$$

利用 Young 不等式并整理得

$$\|Au\|_0 \leq \frac{2C_{11}}{\nu} \|\nabla u\|_0^3 + \frac{2}{\nu} (C_{10} \|u\|_0 + \|F\|_*) \quad (22)$$

式(22)说明弱解 u 同时也是强解。

附注 1 根据区域的有界性知, $L^\alpha(\Gamma_1) \rightarrow L^2(\Gamma_1)$, $\forall \alpha > 2$, 故定理 2 的条件改为存在 $C_0 (\approx O(\nu^2))$, 使得 $\int_{\Gamma_1} (u \cdot n)^\alpha ds \leq C_0 (\alpha \geq 2)$ 满足时也成立, 改进了文献[6]的结果。

定理 3(解的惟一性) 在引理 6 的条件下, 并且当条件 $\|F\|_* < \frac{1}{2}\nu C_1 (\nu C_1 - \frac{1}{2}C_3 C_0^{\frac{1}{2}})$ 成立时, 式(2)的解存在惟一。

证明 假设 u_1, u_2 均为式(2)的解, 即满足式(7), 令 $\bar{u} = u_1 - u_2$, 则有

$$a(\bar{u}, v) + a_1(\bar{u}, u_1, v) + a_1(u_2, \bar{u}, v) = 0 \quad \forall v \in V_0(\Omega)$$

取 $v = \bar{u}$, 则有

$$a(\bar{u}, \bar{u}) + a_1(\bar{u}, u_1, \bar{u}) + a_1(u_2, \bar{u}, \bar{u}) = 0$$

其中

$$a_1(\bar{u}, u_1, \bar{u}) = \int_{\Omega} (\bar{u} \cdot \nabla) u_1 \cdot \bar{u} dx \leq \|\bar{u}\|_{0,4} \|\nabla u_1\|_0 \|\bar{u}\|_{0,y} \leq C \|u_1\|_1 \|\bar{u}\|_1^2 \leq \frac{1}{\nu C_1 - \frac{1}{2}C_3 C_0^{\frac{1}{2}}} \|F\|_* \|\bar{u}\|_1^2$$

$$a_1(u_2, \bar{u}, \bar{u}) = \int_{\Omega} (u_2 \cdot \nabla) \bar{u} \cdot \bar{u} dx \leq \|u_2\|_{0,4} \|\nabla \bar{u}\|_0 \|\bar{u}\|_{0,4} \leq C \|u_2\|_1 \|\bar{u}\|_1^2 \leq \frac{1}{\nu C_1 - \frac{1}{2}C_3 C_0^{\frac{1}{2}}} \|F\|_* \|\bar{u}\|_1^2$$

所以有

$$\left(\nu C_1 - \frac{2}{\nu C_1 - \frac{1}{2}C_3 C_0^{\frac{1}{2}}} \|F\|_* \right) \|\bar{u}\|_1^2 \leq 0 \quad (23)$$

由条件 $\|F\|_* < \frac{1}{2}\nu C_1 (\nu C_1 - \frac{1}{2}C_3 C_0^{\frac{1}{2}})$, 可得 $\|\bar{u}\|_1 = 0$, 式(2)存在惟一解。

3 结 论

对于定常 Navier-Stokes 方程解的惟一性, 混合边界条件和全 Dirichlet 边界条件下有类似的结果, 只不过条件略有不同, 前者包含了对边界数据的要求。但是, 解的存在性有比较大的差别, 混合边界条件下的 Navier-Stokes 方程在比较苛刻的条件下才能证明解的存在。

参考文献:

- [1] Glowinski R. Finite element methods for incompressible viscous flow [M]. Amsterdam, Netherlands: North-Holland, 2003.
- [2] Katamine E, Azegami H, Tsubata T, et al. Solution to shape optimization problems of viscous flow fields [J]. International Journal of Computational Fluid Dynamics, 2005, 19(1): 45-51.
- [3] Heywood J G, Rannacher R, Turek S. Artificial boundaries and flux and pressure conditions for the incompressible Navier-Stokes equations[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluid, 1996, 22(5): 325-352.
- [4] 李开泰, 黄艾香, 黄庆怀. 有限元方法及其应用(下) [M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1988.
- [5] 李开泰, 马逸尘. 数理方程 Hilbert 空间方法(下) [M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1992.
- [6] Kracmar S, Neustupa J. A weak solvability of a steady variational inequality of the Navier-Stokes type with mixed boundary conditions [J]. Nonlinear Analysis-Theory Methods & Applications, 2001, 47(6): 4169-4180.

(编辑 杜秀杰)