

# 基于期望最大化加速算法的正交频分复用信道估计

刘海员, 张太镒, 张蕊萍

(西安交通大学电子与信息工程学院, 710049, 西安)

**摘要:** 针对基于期望最大化(EM)迭代算法的正交频分多路复用(OFDM)信道估计方法复杂度、收敛慢,严重制约 OFDM 的传输速率的缺陷,提出了一种基于 EM 加速算法的 OFDM 信道估计方法.该方法基于拟牛顿加速算法,并结合一种带调整参数的 Broyden 对称秩 1 校正公式来实现,具有二次收敛性,提高了 EM 的计算速度,降低了计算复杂度.仿真结果表明,相比于空间选择期望最大算法,在性能损失只有 0.1 dB 的情况下,EM 算法的复杂度得到很大的降低,且其计算速度可提高十几倍.

**关键词:** 校正公式;期望最大化算法;正交频分多路复用;信道估计

**中图分类号:** TN929.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-987X(2006)02-0203-04

## Orthogonal Frequency Division Multiplexing Channel Estimation Method Based on Accelerate Expectation Maximization Algorithm

Liu Haiyuan, Zhang Taiyi, Zhang Ruiping

(School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

**Abstract:** Aiming at the deficiencies of high complexity, slow convergence and hindering the transmission rate etc. in the orthogonal frequency division multiplexing (OFDM) channel estimation method based on expectation maximization (EM) algorithm, an acceleration EM OFDM channel estimation algorithm was proposed, which is complemented by quasi-Newton accelerate method and combines with Broyden symmetry rank one correction formulae with adjusted parameters. The algorithm has quadratic convergence and can speed up the EM computation. Simulation results show that in the case of only 0.1 dB performance loss, computing speed of the EM algorithm can be increased by more than 10 times compared to the space-alternating generalized expectation-maximization algorithm.

**Keywords:** correction formula; expectation maximization algorithm; orthogonal frequency division multiplexing; channel estimation

正交频分复用(OFDM)<sup>[1]</sup>的相干解调一直是 OFDM 信号检测的重点,由此导致对插入导频 OFDM 信道估计的大量研究<sup>[2]</sup>,基于导频信道估计大体上分为两大类,一类是基于最小平方法和均方误差最小法的信道插值方法,如基于线性插值、样条插值、小波或径向基插值,其特点是方法简单,但性能不高,而且易陷入地板效应.另一类是具有期望最大化(EM)的信道估计迭代算法<sup>[3-6]</sup>,该方法性能效

果很好,但是复杂度较高,收敛速度慢,在实际通信中有较大的时延.

本文针对 EM 信道估计算法的这种缺陷,在拟牛顿加速 EM(QNA-EM)算法的基础上,提出了一种基于变换 Broyden 的加速(BCA-EM)算法,该算法有效地提高了 EM 的收敛速度,降低了 EM 的计算复杂度,相比之下,性能相对先前的空间选择期望最大算法(SAGE)<sup>[7]</sup>,只有很少量的损失.

## 1 系统模型

给出一个 OFDM 信道估计流程图(见图 1),比特流映射为  $S(k)$ ,通过逆傅里叶变换(IDFT)有

$$s(n) = I_{\text{DFT}}\{S(k)\} = \sum_{k=0}^{N-1} S(k) e^{j2\pi kn/N}, n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1)$$

式中: $s(n)$ 是时域信号; $S(k)$ 是频域信号.加入大于信道延时的循环前缀(CP),以消除码间干扰,得到的时域信号为

$$s_g(n) = \begin{cases} s(N+n), & n = -N_g, \dots, -1 \\ s(n), & n = 0, 1, \dots, N-1 \end{cases}$$

接收的时域信号为

$$y_g(n) = s_g(n) \otimes h(n) + w(n)$$

式中: $\otimes$ 为循环卷积; $w(n)$ 为加性高斯噪声; $h(n)$ 为时域信道参数,可表示为

$$h(n) = \sum_{i=0}^{r-1} h_i \exp\left(\frac{j2\pi f_{D_i} T n}{N}\right) \delta(n - \tau_i) \quad (2)$$

$$0 \leq n \leq L-1$$

式中: $f_{D_i}$ 是最大多普勒频率; $T$ 是 OFDM 的符号周期; $r$ 是多径数; $\tau_i$ 是时延参数.对去除循环前缀的时域信号进行离散傅里叶变换,接收端的频域信号为

$$Y(k) = D_{\text{FT}}\{y(n)\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y(n) \exp(-j2\pi kn/N) \quad (3)$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

且信道的频域信号变为

$$H(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \exp\left(-j \frac{2\pi kn}{N}\right) \quad (4)$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

根据式(1)、式(3)、式(4),可得

$$Y(k) = S(k)H(k) + W(k) \quad (5)$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

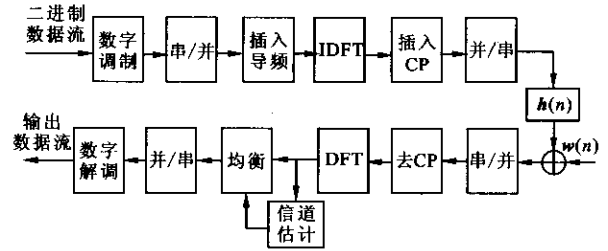
也可以写成矩阵形式

$$\mathbf{Y} = \text{diag}(\mathbf{S})\mathbf{F}_L \mathbf{h} \quad (5)$$

式中: $\mathbf{F}_L[i, j] = \exp(-2\pi ij/N)$ ,  $0 \leq i \leq N-1$ ,  $0 \leq j \leq L-1$ ,是  $N \times L$  维的矩阵; $\mathbf{Y}$ 是  $N$  维列向量; $\text{diag}(\mathbf{S})$ 表示以向量  $\mathbf{S}$  的元素为对角矩阵; $\mathbf{h}$ 是  $L$  列向量.

根据估计出的信道频域响应  $H_e(k)$ ,得到  $s(n)$  的频域信号  $S_e(k) = \frac{Y(k)}{H_e(k)}$ , 反映射后得到比特流.同样也可以估计时域信号  $h_e(n)$ ,再经过傅里叶变

换得到  $H_e(k)$ ,重复上述步骤,也可以得到反映射出的比特流.



IDFT 为逆傅里叶变换;DFT 为傅里叶变换;CP 为循环前缀;  
 $h(n)$ 为时域信道参数; $w(n)$ 为加性高斯噪声

图1 包含导频符号和信道估计的基带 OFDM 系统结构

## 2 基于加速 EM 算法的 OFDM 信道估计

对信源产生的二进制数据流,本文采用 QPSK 进行调制,其星座点数  $C=4$ .假定信道在一帧内是不变的,则  $H(k)$ 在一帧内是定值,因而只需在该帧中估计  $H(k)$  ( $0 \leq k \leq N-1$ ) 即可.定义接收信号  $\bar{\mathbf{Y}} = [Y_1, \dots, Y_D]$ ,传输信号  $\bar{\mathbf{S}} = [S_1, \dots, S_D]$ ,称  $\bar{\mathbf{Y}}$  和  $(\bar{\mathbf{Y}}, \bar{\mathbf{S}})$  是不完全数据和完全数据集,按照期望最大化原理,如果  $Y_1, \dots, Y_D$  是独立同分布的,则可以写出不完全数据的概率密度函数

$$f(\bar{\mathbf{Y}} | \mathbf{H}) = \prod_{d=1}^D f(Y_d | \mathbf{H})$$

那么,其对数似然函数为

$$\text{lb}f(\bar{\mathbf{Y}} | \mathbf{H}) = \sum_{d=1}^D \text{lb}f(Y_d | \mathbf{H})$$

完全数据的对数似然函数由下式给出

$$f(\bar{\mathbf{Y}}, \bar{\mathbf{S}} | \mathbf{H}) = \sum_{d=1}^D \left\{ \text{lb} \frac{1}{C} f_{d,k}(Y_d | \mathbf{H}) \right\} \quad (6)$$

式中: $\bar{\mathbf{S}} = [S_{1,k}, \dots, S_{D,k}]$ 是传输信号的一个实现,且

$$f_{d,k}(Y_d | \mathbf{H}) = \frac{(2\pi)^{-1/2}}{\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \|Y_d - HS_{d,k}\|^2\right\}$$

$$d, k \in \{1, 2, \dots, C\}, 1 \leq d \leq D$$

尽管式(6)是  $\mathbf{H}$  的似然函数,但由于  $\mathbf{H}$  的各个分量的相关性,导致 EM 求解参数不独立,故只能通过式(4)估计各分量独立的  $h$ .基于 EM 算法求解  $h$  的两个步骤如下.

(1)期望步(E步)

$$Q(\mathbf{h} | \mathbf{h}^{(p)}) = E\{\text{lb}f(\mathbf{Y}, \mathbf{d} | \mathbf{h}) | \mathbf{h}^{(p)}, \mathbf{Y}\} \quad (7)$$

(2)最大化步(M步)

$$\{\mathbf{h}^{(p+1)}\} = \arg\max_{\mathbf{h}} (Q(\mathbf{h} | \mathbf{h}^{(p)}, \mathbf{Y})) \quad (8)$$

根据期望步和最大化步,  $p$  次迭代的信道参数的期望可以写成

$$\begin{aligned} E\{\ln(f(\mathbf{Y}, \mathbf{D} | \mathbf{h})) | \mathbf{h}^{(p)}, \mathbf{Y}\} = \\ E\{\ln(f(\mathbf{Y} | \mathbf{h}, \mathbf{D})f(\mathbf{D} | \mathbf{h})) | \mathbf{h}^{(p)}, \mathbf{Y}\} = \\ E\left\{\ln\left(\prod_{k=0}^{N-1} f(Y(k) | \mathbf{S}(k), H(k))\right) | \mathbf{h}^{(p)}, \mathbf{Y}\right\} + A = \\ -N\ln((2\pi)^{-1/2}\sigma^2) - \frac{(2\pi)^{-1/2}}{\sigma^2} \cdot \\ E\{\|\mathbf{Y} - \text{diag}(\mathbf{S})\mathbf{F}_L\mathbf{h}\|^2 | \mathbf{h}^{(p)}, \mathbf{Y}\} + A \quad (9) \end{aligned}$$

式中:  $A$  为常数.

给定  $\mathbf{h}^{(p)}$  和  $\mathbf{Y}$ , 有

$$\begin{aligned} E\{\|\mathbf{Y} - \text{diag}(\mathbf{S})\mathbf{F}_L\mathbf{h}\|^2 | \mathbf{h}^{(p)}, \mathbf{Y}\} = \\ \mathbf{Y}^H\mathbf{Y} - 2\text{Re}(\mathbf{Y}^H\mathbf{Z}\mathbf{h}) + \mathbf{h}^H\mathbf{P}\mathbf{h} \quad (10) \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} = \text{diag}\{E\{\mathbf{S} | \mathbf{h}^{(p)}, \mathbf{Y}\}\}\mathbf{F}_L \\ \mathbf{P} = \mathbf{F}_L^H \text{diag}\{E\{\mathbf{S}^H\mathbf{S} | \mathbf{h}^{(p)}, \mathbf{Y}\}\}\mathbf{F}_L \quad (11) \end{aligned}$$

$\text{Re}(\cdot)$  表示取实部. 需要指出的是在期望步所求的期望  $E\{\cdot\}$  是以  $d$  为变量的, 最大化步是以  $\mathbf{h}$  为变量的, 因此函数  $Q(\mathbf{h} | \mathbf{h}^{(p)})$  可以被简化成

$$Q(\mathbf{h} | \mathbf{h}^{(p)}) = 2\text{Re}(\mathbf{Y}^H\mathbf{Z}\mathbf{h}) - \mathbf{h}^H\mathbf{P}\mathbf{h} \quad (12)$$

由式(1)和全概率公式, 对  $k=0, 1, \dots, N-1$ , 有

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{S}(k) | \mathbf{h}^{(p)}, \mathbf{Y}\} = E\{D(k) | \mathbf{h}^{(p)}, \mathbf{Y}\} = \\ \sum_{l=1}^C q_l P_r(D(k) = q_l | \mathbf{h}^{(p)}, \mathbf{Y}) \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\{\|\mathbf{S}(k)\|^2 | \mathbf{h}^{(p)}, \mathbf{Y}\} = E\{\|D(k)\|^2 | \mathbf{h}^{(p)}, \mathbf{Y}\} = \\ \sum_{l=1}^C |q_l|^2 P_r(D(k) = q_l | \mathbf{h}^{(p)}, \mathbf{Y}) \quad (14) \end{aligned}$$

式中:  $l$  是元素标量, 其值在相应的星座图中. 如果 QPSK 调制被用于 OFDM 系统且数据符号的能量和导频符号的能量都是  $\sigma_s^2$ , 则有

$$E\{\|\mathbf{S}(k)\|^2 | \mathbf{h}^{(p)}, \mathbf{Y}\} = \sigma_s^2, \mathbf{P} = \sigma_s^2 \mathbf{F}_L^H \mathbf{F}_L$$

式(13)和式(14)需求出条件概率  $P_r(D(k)=q_l | \mathbf{h}^{(p)}, \mathbf{Y})$ . 由  $D(k)$  传送的第  $k$  个子载波的数据符号,  $Y(k')$  和  $H(k')$  在另外的  $k' \neq k$  的子载波条件概率  $D(k)$  可以表示为

$$\begin{aligned} P_r(D(k) = q_l | \mathbf{h}^{(p)}, \mathbf{Y}) = \\ \frac{f(Y(k) | \mathbf{h}^{(p)}, D(k) = q_l) P_r(D(k) = q_l)}{f(Y(k) | \mathbf{h}^{(p)})} \quad (15) \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned} f(Y(k) | \mathbf{h}^{(p)}) = \\ \sum_{l=1}^C f(Y(k) | \mathbf{h}^{(p)}, D(k) = q_l) P_r(D(k) = q_l) \end{aligned}$$

由式(11)和(12)可知,  $\mathbf{Z}$ 、 $\mathbf{P}$  和  $Q(\mathbf{h} | \mathbf{h}^{(p)})$  在  $M$  步中

更新, 而冲击响应向量  $\mathbf{h}^{(p+1)}$  根据 BCA-EM 算法在  $\mathbf{h}^{(p)}$  上迭代得到. 令  $g(\mathbf{h}^{(p)})$  为式(11)中的梯度, 有

$$g(\mathbf{h}^{(p)}) = \left. \frac{\partial Q(\mathbf{h} | \mathbf{h}^{(p)})}{\partial \mathbf{h}} \right|_{\mathbf{h}=\mathbf{h}^{(p)}} = 2(\mathbf{Y}^H\mathbf{K} - \mathbf{P}\mathbf{h}^{(p)}) \quad (16)$$

BCA-EM 算法是基于 Broyden 变换秩 1 的加速 EM 算法, 该算法是在拟牛顿基础上改进的, 不同于一般的 EM 算法, 在求最大化步时通过求  $\frac{\partial Q(\mathbf{h} | \mathbf{h}^{(p)})}{\partial \mathbf{h}} = 0$  得到迭代公式  $\mathbf{h}^{(p+1)} = G(\mathbf{h}^{(p)})$ , 这个表达式本质上是二次收敛的, 与拟牛顿加速算法<sup>[4]</sup>的主要区别在于添加了延时参数, 目的是提高算法的性能.

本文算法步骤如下.

- (1) 取初始值  $\mathbf{h}^{(0)}$ , 常数  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $\mathbf{B}_0 = \mathbf{I}$ ,  $V_0 = \|\mathbf{g}(\mathbf{h}^{(0)})\|$ ,  $p=0$ .
- (2) 如果  $\|\mathbf{g}(\mathbf{h}^{(p)})\| = 0$ , 停止计算  $\mathbf{h}^{(p)}$ , 否则执行第(3)步.
- (3) 如果  $p > \beta$ , 执行第(4)步, 否则执行第(5)步. 这里  $\beta$  是一个非负整数, 为延时参数.
- (4) 如果  $\|\mathbf{g}(\mathbf{h}^{(p)})\| < \alpha V_p$ , 选择  $V_{p+1}$  使  $\|\mathbf{g}(\mathbf{h}^{(p)})\| \leq V_{p+1} < \alpha V_p$ , 置  $\mathbf{h}^{(p+1)} = \mathbf{h}^{(p)} - \mathbf{B}_p \mathbf{g}(\mathbf{h}^{(p)})$ , 则转第(6)步, 否则转第(5)步.
- (5) 置  $\mathbf{h}^{(p+1)} = \mathbf{h}^{(p)}$ , 取 EM 步长为  $\delta_p$ , 令  $\mathbf{h}^{(p+1)} = \mathbf{h}^{(p)} + \delta_p$ .
- (6) 对  $\mathbf{B}_p$  使用 Broyden 对称秩 1 校正公式

$$\mathbf{B}_{p+1} = \mathbf{B}_p + \frac{(\Delta_p - \mathbf{B}_p \delta_p)(\Delta_p - \mathbf{B}_p \delta_p)^T}{(\Delta_p - \mathbf{B}_p \delta_p)^T \delta_p}$$

这里  $\Delta_p = \mathbf{g}(\mathbf{h}^{(p+1)}) - \mathbf{g}(\mathbf{h}^{(p)})$ ,  $\delta_p = \mathbf{h}^{(p+1)} - \mathbf{h}^{(p)}$

- (7) 令  $p = p+1$ , 转到第(2)步.

上面算法中, 因为对  $\alpha \in (0, 1)$ , 有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{g}(\mathbf{h}^{(p)})\| \leq V_{p+1} < \alpha V_p < \alpha^2 V_{p-1} < \\ \dots < \alpha^p V_0 \rightarrow 0 \quad (17) \end{aligned}$$

由式(17)可见, 算法的收敛性很明显, 在该算法中, 初始值  $\mathbf{h}^{(0)}$  的获取对该算法是否收敛到全局最大至关重要, 只需要 4 个导频符号, 估计出  $\mathbf{H}$  中的 4 个位置值, 在其他位置补 0, 再通过逆傅里叶变换得到初始值  $\mathbf{h}^{(0)}$ , 这样就可以较大程度地避免陷入局部最小.

### 3 数值结果

仿真所用的参数是 DVB-T 参数, 见表 1. 假定保护间隔比信道冲击响应的最大长度还要长, 这样可以避免码间串扰. 表 2 给出了多径瑞利衰落信道的时延、幅度和相位. 图 2 给出的是在不同信噪比下

各种插值方法误码率的比较. 仿真结果表明, 加速 EM 算法的性能比传统的插值算法性能要好, 尽管略逊于 SAGE 算法, 有 0.1 dB 的性能损失, 但是从算法的迭代次数来看(见图 3, 这里归一化的  $E_{MS} = \|h - \hat{h}\|^2 / \|h\|^2$ ), BCA-EM 算法比 SAGE 要好

得多, 而且还好于 QNA-EM 算法, 图 3 选取 20 次迭代, 一般来说, 在实用情况下选取 1~3 次迭代就可以估计了. 所以说, 本文算法是在 EM 算法的性能和计算速度之间的一种折中.

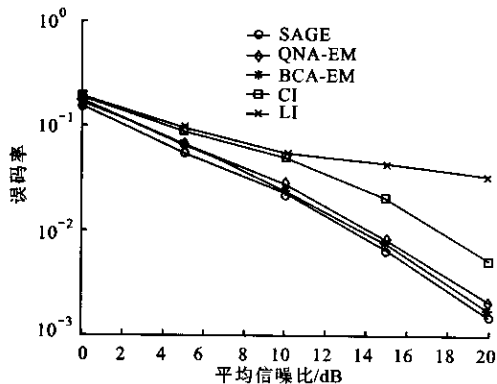
### 4 结 论

本文提出了一种基于 Broyden 对称秩 1 校正公式的加速 EM 算法的信道估计方法, 在每次迭代过程中使用导频信息. 该方法相比于传统的信道插值方法, 性能有较大的提高; 相比于拟牛顿加速 EM 算法, 性能和速度均有所提高; 相比 SAGE 算法其性能有很小的损失, 但收敛速度快了很多. 因此, 该方法在未来的移动通信系统中应有一定的实用价值.

### 参考文献:

- [1] Meng H H, Che H W. Channel estimation for OFDM systems based on comb-type pilot arrangement in frequency selective fading channels [J]. IEEE Transactions on Consumer Electronics, 1998, 44(1):217-225.
- [2] Necker M C, Stuber G L. Totally blind channel estimation for OFDM on fast varying mobile radio channels [J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2004, 3(5): 1514-1525.
- [3] Todd K M. Expectation-maximization algorithm [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 1996, 13(6): 47-60.
- [4] 高旅端, 陈 志. EM 算法的拟牛顿加速方法 [J]. 系统工程理论与实践, 1998, 18(10): 69-73.
- [5] Xie Y Z, Georgiades C N. Two EM-type channel estimation algorithms for OFDM with transmitter diversity [J]. IEEE Transactions on Communications, 2003, 51(1):106-115.
- [6] Mazet L, Buzenac-Settineri V, de Courville M, et al. An EM based semi-blind channel estimation algorithm designed for OFDM systems [A]. Conference Record of the Thirty-Sixth Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers [C]. Pacific Groove, USA: Institute of Electrical and Electronics Engineers Computer Society, 2002. 1642-1646.
- [7] Chung P J, Böhme J F. Comparative convergence analysis of EM and SAGE algorithms in DOA estimation [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2001, 49(12):2940-2949.

(编辑 刘 杨)



CI 表示立方插值; LI 表示线性插值

图 2 几种信道估计方法误码率的比较

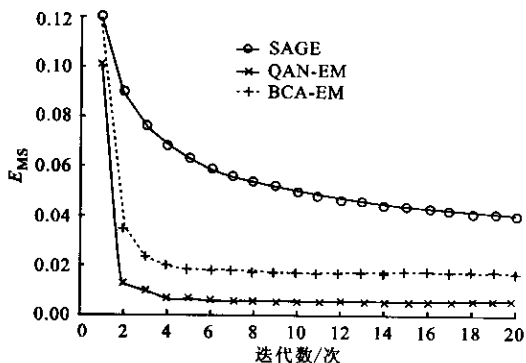


图 3 3 种 EM 算法的收敛速度比较

表 1 仿真参数表

子载波个数/个	导频率	循环前缀数	保护类型	带宽/MHz	调制星座图
64	1/16	16	循环前缀	2	QPSK

表 2 信道冲击响应参数

路径	实验时延/ $\mu s$	幅度/dB	相位/ $^\circ$
路径 1	0.0	0	90
路径 2	0.2	20	0
路径 3	1.9	20	72
路径 4	3.9	10	144
路径 5	8.2	14	216
路径 6	15.0	18	288