第39卷 第12期 2005年12月
西 安 交 通 大 学 学 报
JOURNAL OF XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY
Vol.39 №12 Dec. 2005

伙伴选择问题正规解的存在性

李乃成，靖稳峰，徐宗本
（西安交通大学理学院，710049，西安）

摘要：基于虚拟企业管理中伙伴选择问题的整数规划模型，从理论上分析了它的性态，证明了其正规解的存在性. 在单位时间拖期罚款不小于投资利息的条件下，获得了最佳工期必是预定工期的结论. 所得结果对于该类问题的研究与求解以及制定工程拖期罚率提供了理论依据，对实际应用具有重要意义.

关键词：数学模型；整数规划；伙伴选择；虚拟企业
中图分类号：O22 **文献标识码**：A **文章编号**：0253-987X(2005)12-1387-04

Existence of Normal Solutions to Partner Selection Problems

Li Naicheng, *Jing Wenfeng*, *Xu Zongben*
(School of Sciences, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: Based on an integer programming model for partner selection problems (PSPs) in virtual enterprise management, the properties of the problem are theoretically analyzed and the existence of normal solutions to the PSPs is proved. It is shown that the optimal project span-time must be identical with the stipulated project span-time under the condition that the amount of the project postponement fine in unit time is not less than the interest of capital investment. The resulting conclusion provides a theoretical criterion for the further researches and the solution of PSPs and for determining project postponement fining rate. It is of significance for real application.

Keywords: *mathematical model*; *integer programming*; *partner selection*; *virtual enterprise*

虚拟企业管理中的伙伴选择问题(简称为PSP)是指在保证完成工程项目或任务的前提下，选择合适的合作伙伴以使企业获得最大利润的运筹学问题. 它广泛出现于企业动态结盟、投招标分析、工程项目管理等领域.

对于PSP问题的研究，近年来已引起国内外学者的高度关注，并被公认为是敏捷制造和供应链管理的热点课题[1]，已有几位学者提出一些模型[2,3]，但现有研究的一个缺憾是没有有效解决该类问题正规解的存在性.

本文针对文[4]提出的整数规划模型，从理论上分析PSP的性态，严格证明了PSP正规解的存在性. 这一结果不仅为PSP问题的研究与求解奠定了理论基础，而且也为投资人制定拖期罚款率提供了理论依据.

1 伙伴选择问题的整数规划模型

对于一个由 n 个项目组成的工程(将这些项目分别记为 $1,2,\cdots,n$)，文[4]提出PSP问题的整数规划模型如下

$$\min Z(X,Y)=\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i)+\sum_{t=1}^{C(X)}r(t)\cdot\left[\sum_{k=1}^{t}\sum_{i=1}^{n}\overline{f}_i(k,x_i,y_i)-\sum_{k=1}^{t}e(k)\right]^{+}+\beta([C(X)-D]^{+})[C(X)-D]^{+}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_i\in\{x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{im_i}\} & i=1,2,\cdots,n\\ y_i+x_i\leqslant y_k & \forall(i,k)\in H\\ \underline{S}_i(X)\leqslant y_i\leqslant\overline{S}_i(X) & i=1,2,\cdots,n\end{cases}\tag{1}$$

式中：$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示工期变量或称为一个

收稿日期：2005-04-25. 作者简介：李乃成(1955～)，男，副教授.

选择策略,分量 x_i 表示项目 i 的工期,它取值于由项目 i 的 m_i 个应标人的报价所构成的离散数据集 $\{x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{im_i}\}$;$Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$表示开工时间变量,分量 y_i 表示在选择策略 X 下项目 i 的开工时间;$\underline{S}_i(X)$、$\overline{S}_i(X)$表示在选择策略 X 下,项目 i 允许的最早与最晚开工时间;$C(X)$和 D 表示在选择策略 X 下工程的实际完成工期和由合同规定的工期;$e(k)$表示时刻 k 所获得的投资额;$r(t)$表示 t 时刻银行的借贷利率;$\beta(t)$表示合同所规定的工程拖期 t 单位时间的罚款率;H 表示项目的所有衔接关系的集合,若项目 i 是项目 k 的紧前工序(即项目 k 只能在项目 i 完成后开工),则以二元关系$(i,k)\in H$ 表示,在事先标定项目时假定已使得 $i<k$ 对任何$(i,k)\in H$ 成立.

$f_i(x_i)$表示项目 i 的费用,盟主对项目的付款方式是开工时付 $\alpha f_i(x_i)$,项目完工时再付剩余的$(1-\alpha)f_i(x_i)$,则在时刻 t,盟主对项目 i 的支出费用为

$$\overline{f}_i(t,x_i,y_i)=\begin{cases}\alpha f_i(x_i) & t=y_i\\ (1-\alpha)f_i(x_i) & t=y_i+x_i\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$\sum\limits_{k=1}^{t}\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{f}_i(t,x_i,y_i)$ 和 $\sum\limits_{k=1}^{t}e(k)$ 分别表示到时刻 t 为止,盟主向承包商支付的项目费用总数和盟主收到的投资额总数,记号 $A^+=\begin{cases}A & A>0\\ 0 & A\leqslant 0\end{cases}$. 工程的总费用 $Z(X,Y)$中的 3 项分别表示项目的费用、支付银行的利息和工程拖期罚款.

2 伙伴选择问题正规解的存在性

作为组合优化问题,PSP 问题的全局最优解总是存在的,记它的全局最优解为

$$(X^*,Y^*,C^*)$$

其中:$X^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)$, $x_i^*\in\{x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{im_i}\}$表示项目 i 的最佳工期(由此产生对应的承包人,如 $x_i^*=x_{i2}$,即候选人 2 为最佳候选人);$Y^*=(y_1^*,y_2^*,\cdots,y_n^*)$,$y_i^*\in[\underline{S}_i(X^*),\overline{S}_i(X^*)]$为项目 i 的最佳开工时间;C^* 是最佳工程工期.

在通常情况下,对于 PSP 问题,总有 $C^*=D$,即最佳工期必是预定工期,具有这一特征的解称为 PSP 的一个正规解. 下面,定理给出 PSP 问题正规解的存在性.

定理 令 $E=\sum\limits_{t=1}^{D}e(t)$ 为工程总投资,假定工期延长一个单位时间所引起的项目报价差异相对于项目总费用是很小的,β^* 表示工程延期盟主所遭受的最低单位时间罚款率,r^* 表示最高贷款利率,则当

$$\beta^*\geqslant r^*E \tag{2}$$

时,PSP 问题一定存在正规解.

式(2)可解释为单位时间拖期罚款不小于总投资的利息. 在这一条件下,上述定理指出:PSP 问题的最佳工期即是预先规定的合同工期.

为了证明定理,考虑式(1)中的目标函数 $Z(X,Y)$. 由于 C 表示由选择策略(X,Y)决定的工期,$Z(X,Y)$也可以认为是工期 C 的函数,故也写作

$$Z(C)=Z(C(X,Y))=\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i)+\sum_{t=1}^{C}r(t)\cdot\Big[\sum_{k=1}^{t}\sum_{i=1}^{n}\overline{f}_i(k,x_i,y_i)-\sum_{k=1}^{t}e(k)\Big]^++\beta([C-D]^+)[C-D]^+ \tag{3}$$

为证定理,先证明下述引理.

引理 在定理条件下,函数 $Z(C)$具有以下特征:① $Z(C_1)>Z(C_2)$,$\forall C_1<C_2\leqslant D$;② $Z(C_1)<Z(C_2)$,$\forall D\leqslant C_1<C_2$. 从而,$Z(C)$在 D 处取得惟一全局极小.

证明 由于 C 取值于离散集,不妨设 $C_2=C_1+1$. 假定 $C_1=C(X^*,Y^*)$,$C_2=C(\overline{X},\overline{Y})$,$\overline{X}=(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\cdots,\overline{x}_n)$,$\overline{Y}=(\overline{y}_1,\overline{y}_2,\cdots,\overline{y}_n)$. 由于 $C_2=C_1+1$,故对某一个项目(例如项目 i_0)的工期由原策略的 $x_{i_0}^*$ 改变到 $x_{i_0}^*+1$(即滞后了一个单位时间,由此可能引起候选人的变更),而其他项目工期不变. 这时

$$\left.\begin{array}{ll}\overline{x}_i=x_i^*\quad(i\neq i_0) & \overline{x}_{i_0}=x_{i_0}^*+1\\ \overline{y}_k=y_k^*+1\quad((i_0,k)\in H) & \overline{y}_i=y_i^*\ (\text{其他})\end{array}\right\} \tag{4}$$

由于项目 i_0 的承包人可能变化,因此项目 i_0 的报价也相应降低(一般地,承诺工期长的候选人报价低). 当工期从 $x_{i_0}^*$ 变为 $\overline{x}_{i_0}=x_{i_0}^*+1$ 时,由此引起的工程报价差额为

$$\Delta\overline{f}_{i_0}=\overline{f}_{i_0}(x_{i_0}^*)-\overline{f}_{i_0}(x_{i_0}^*+1)\geqslant 0$$

为了分析差额 $\Delta Z(C_1)=Z(C_1)-Z(C_2)$,注意到式(3)中的第 1 项 $\sum\limits_{i=1}^{n}f_i(x_i)$ 表示在选择策略 X 下盟主所承担的项目总费用,记这个总费用为 $F(C)$,则

$$\Delta F(C_1)\stackrel{\Delta}{=}F(C_1)-F(C_2)=\Delta\overline{f}_{i_0}$$

而在 $Z(C)$的第 2 项中

$$\overline{F}(t,C)\stackrel{\Delta}{=}\sum_{k=1}^{t}\sum_{i=1}^{n}\overline{f}_i(k,x_i,y_i)$$

表示盟主到 t 时刻对所有项目的支出总和，所以

$$\Delta Z(C_1)=Z(C_1)-Z(C_2)=\Delta F(C_1)+\Big\{\sum_{t=1}^{C_1}r(t)\Big[\bar{F}(t,C_1)-\sum_{k=1}^{t}e(k)\Big]^+-\sum_{t=1}^{C_1+1}r(t)\Big[\bar{F}(t,C_2)-\sum_{k=1}^{t}e(k)\Big]^+\Big\}+\{\beta([C_1-D]^+)[C_1-D]^+-\beta([C_1+1-D]^+)[C_1+1-D]^+\}$$

分别记上式右端第 2 大项、第 3 大项为 $\Delta B_1(C_1)$、$\Delta B_2(C_1)$，则有

$$\Delta Z(C_1)=\Delta F(C_1)+\Delta B_1(C_1)+\Delta B_2(C_1) \tag{5}$$

以下估计 $\Delta B_1(C_1)$. 记

$$t_0=y_{i_0}^*+x_{i_0}^*$$

式中：t_0 是在选择策略(X^*,Y^*)下项目 i_0 的完工时间. 显然，在时刻 t_0 以前开工的项目及与项目 i_0 无关的项目都按原计划完工，且不改变盟主支付项目的费用，将这些项目的指标集记为 $I\subset\{1,2,\cdots,n\}$. 涉及选择策略由(X^*,Y^*)变为$(\bar{X},\bar{Y})$而引起滞后一个单位时间完工的项目只包括项目 i_0 及其紧后项目(即满足使$(i_0,k)\in H$ 的所有项目 k). 这部分项目影响到开工时间及盟主支付项目费用的时间，将其指标集记为 J，但 J 中不包含 i_0. 由于项目 i_0 较策略(X^*,Y^*)滞后一个单位时间完工，所以其他受策略变更的紧后项目 k 不引起拖工(只是相对开工时间 y_k^* 拖后一个单位时间，即 $\bar{y}_k=y_k^*+1$). 所以，就盟主对项目的支付而言，显然

$$\bar{f}_i(t,x_i^*,y_i^*)=\bar{f}_i(t,\bar{x}_i,\bar{y}_i)\quad\forall i\in I \tag{6}$$

$$\bar{f}_i(t,x_i^*,y_i^*)=\bar{f}_i(t+1,\bar{x}_i,\bar{y}_i)\quad\forall i\in J \tag{7}$$

$$\bar{f}_{i_0}(t,x_{i_0}^*,y_{i_0}^*)=\begin{cases}\alpha f_{i_0}(x_{i_0}^*) & t=y_{i_0}^*\\ (1-\alpha)f_{i_0}(x_{i_0}^*) & t=y_{i_0}^*+x_{i_0}^*\\ 0 & \text{其他}\end{cases} \tag{8}$$

$$\bar{f}_{i_0}(t,\bar{x}_{i_0},\bar{y}_{i_0})=\begin{cases}\alpha f_{i_0}(x_{i_0}^*+1) & t=y_{i_0}^*\\ (1-\alpha)f_{i_0}(x_{i_0}^*+1) & t=y_{i_0}^*+x_{i_0}^*+1\\ 0 & \text{其他}\end{cases} \tag{9}$$

根据以上分析可得

$$\Delta B_1(C_1)=\sum_{t=1}^{C_1}r(t)\Big[\bar{F}(t,C_1)-\sum_{k=1}^{t}e(k)\Big]^+-\sum_{t=1}^{C_1+1}r(t)\Big[\bar{F}(t,C_2)-\sum_{k=1}^{t}e(k)\Big]^+=\sum_{t=1}^{t_0-1}r(t)\{[Y(t,C_2)+\Delta\bar{F}(t,C_1)]^+-[Y(t,C_2)]^+\}+\sum_{t=t_0}^{C_1}r(t)\Big[\bar{F}(t,C_1)-\sum_{k=1}^{t}e(k)\Big]^+-\sum_{t=t_0}^{C_1+1}r(t)\Big[\bar{F}(t,C_2)-\sum_{k=1}^{t}e(k)\Big]^+ \tag{10}$$

式中

$$Y(t,C_2)=\bar{F}(t,C_2)-\sum_{k=1}^{t}e(k) \tag{11}$$

$$\Delta\bar{F}(t,C_1)=\bar{F}(t,C_1)-\bar{F}(t,C_2) \tag{12}$$

显然，在项目 i_0 开工前(即 $t<y_{i_0}^*$)，恒有 $\Delta\bar{F}(t,C_1)=0$，而在项目 i_0 开工后和完工前(即 $t\in[y_{i_0}^*,t_0-1]$)，恒有

$$\Delta\bar{F}(t,C_1)=\alpha\Delta\bar{f}_{i_0}=\alpha\,\Delta F(C_1)$$

而对任何 $t>t_0$，显然有

$$\bar{F}(t+1,C_2)=\bar{F}(t,C_1)-\Delta F(C_1)$$

记

$$Y_1(t,C_1)=\bar{F}(t,C_1)-\sum_{k=1}^{t}e(k) \tag{13}$$

为了简化讨论，以下假设银行贷款利率 $r(t)$与工期拖期单位时间罚款率 $\beta(t)$不随时间改变，将它们分别记为 r^* 和 β^*，于是根据式(5)、式(10)～式(13)可得

$$\Delta Z(C_1)=\Delta F(C_1)-r^*[Y(t_0,C_2)]^++r^*\sum_{t=y_{i_0}^*}^{t_0-1}\{[Y(t,C_2)+\alpha\Delta F(C_1)]^+-[Y(t,C_2)]^+\}+r^*\sum_{t=t_0}^{C_1}\{[Y_1(t,C_1)]^+-[Y_1(t,C_1)-\Delta F(C_1)-e(t+1)]^+\}+\beta^*\{[C_1-D]^+-[C_1+1-D]^+\} \tag{14}$$

情形 1　$C_1<C_2\leqslant D$，此时$[C_1-D]^+=[C_1+1-D]^+=0$. 注意到，对任何 $A\geqslant B$，有

$$[A]^+-[B]^+=\begin{cases}A-B & B\geqslant 0\\ A & A\geqslant 0>B\\ 0 & 0>A\geqslant B\end{cases} \tag{15}$$

从而，根据式(14)有

(1)当$[Y(t_0,C_2)]^+=0$ 时，直接有 $\Delta Z(C_1)>0$；

(2)当$[Y(t_0,C_2)]^+>0$ 时，有

$$\Delta Z(C_1)=\Delta F(C_1)-r^*Y(t_0,C_2)+r^*\sum_{t=y_{i_0}^*}^{t_0-1}[\alpha\,\Delta F(C_1)]+r^*\sum_{t=t_0}^{C_1}\{[Y_1(t,C_1)]^+-[Y_1(t,C_1)-\Delta F(C_1)-e(t+1)]^+\}>\Delta F(C_1)-r^*Y(t_0,C_2)+r^*x_{i_0}^*[\alpha\Delta F(C_1)]+$$

$$r^* \sum_{t=t_0}^{C_1} \{[Y_1(t,C_1)]^+ - [Y_1(t,C_1)-e(t+1)]^+\}$$

(16)

注意到 $Y_1(t_0,C_1)>Y(t_0,C_2)$，而且必然存在 $t^*\in\{t_0,t_1,\cdots,C_1\}$，使 $[Y_1(t^*,C_1)-e(t^*+1)]^+=0$（例如，$t^*=C_1$，即工程完工时，总花费不会高于工程投资总额）. 假定 $t^*\geqslant t_0$ 是这样的最小指标，以使对任何 $t\in[t_0,t^*]$，有 $Y_1(t,C_1)-e(t+1)>0$. 这样，由上式推出

$$\begin{aligned}\Delta Z(C_1) > \Delta F(C_1) + r^* x_{i_0}^* [\alpha\, \Delta F(C_1)] - \\ r^* Y_1(t_0,C_1) + r^* \sum_{t=t_0}^{t^*-1} e(t+1) + \\ r^*[Y_1(t^*,C_1)]^+ = \Delta F(C_1) + \\ r^* x_{i_0}^*[\alpha \Delta F(C_1)] - r^* Y_1(t^*,C_1) + \\ r^*[\bar{F}(t^*,C_1) - \bar{F}(t_0,C_1)] + \\ r^*[Y_1(t^*,C_1)]^+ > 0\end{aligned}$$

这说明当 $C_1<C_2\leqslant D$ 时，$Z(C)$ 是单调递减函数.

情形2　$D\leqslant C_1<C_2$，由式(15)知以下不等式成立：①$[A]^+-[B]^+\leqslant A-B,\ \forall A\geqslant B$；②$-[A]^+\leqslant -A$. 于是，由式(14)直接推得

$$\begin{aligned}\Delta Z(C_1) \leqslant \Delta F(C_1) - r^* Y(t_0,C_2) + \\ r^* x_{i_0}^*[\alpha \Delta F(C_1)] + r^* \sum_{t=t_0}^{C_1} \Delta F(C_1) + \\ r^* \sum_{t=t_0}^{C_1} e(t+1) - \beta^* < \Delta F(C_1) - \\ r^* \bar{F}(t_0,C_2) + r^* \sum_{t=1}^{C_1+1} e(t) + \\ r^*(C_1 - y_{i_0}^* + 1)\Delta F(C_1) - \beta^* = r^* E - \beta^* - \\ r^*[\bar{F}(t_0,C_1) - f_{i_0}(x_{i_0}^*) + \alpha f_{i_0}(x_{i_0}^*+1) - \\ \left(C_1 - y_{i_0}^* + 1 + \frac{1}{r^*}\right)\Delta F(C_1)]\end{aligned}$$

注意到，$\Delta F(C_1)$ 代表工期延长一个单位时间为盟主所带来的额外获益，根据定理假设，这个获益相对于工程的总费用（或项目本身的总费用）是很小的. 因而，总可以假定

$$\begin{aligned}\bar{F}(t_0,C_1) - f_{i_0}(x_{i_0}^*) + \alpha f_{i_0}(x_{i_0}^*+1) - \\ \left(C_1 + y_{i_0}^* + 1 + \frac{1}{r^*}\right)\Delta F(C_1) > 0\end{aligned}$$

于是有

$$\Delta Z(C_1) \leqslant r^* E - \beta^*$$

依式(2)，$\Delta Z(C_1)\leqslant 0$，即当 $D\leqslant C_1<C_2$ 时，$Z(C)$ 对 C 是单调递增函数，引理证毕.

由引理立即可证定理结论.

定理的证明　设 (X^*,Y^*,C^*) 表示PSP问题的最优解，如果 $C^*\neq D$，则不妨设 $C^*>D$，于是由引理（令 $C^*=C_2$，$D=C_1$），则有

$$Z(C^*) > Z(D)$$

这推出 (X^*,Y^*,C^*) 不是最优解，与假设矛盾. 若 $C^*<D$，同样得到矛盾，这说明必有 $C^*=D$.

3　结　论

(1)在PSP模型中，可直接取 $C(X)=D$ 来求解，从而可取掉模型中目标函数所包含的工期变量. 在这种情况下，应增加相应项目的工期之和等于 D 的约束条件.

(2)定理说明：在工程拖期单位时间罚款额 $\beta^*\geqslant r^*E$ 的条件下，盟主遵循约定的工期作为挑选伙伴的依据是最佳的赢利原则. 对于投资者而言，为了保证工程工期和投资方利益，工程拖期单位时间罚款额不应小于 r^*E（否则有可能造成中标人有意拖长工期）.

(3)由于所有有效候选人的项目报价和工期是可排序的（一般地，承诺工期长者报价低，工期较短者报价高），故从盟主的角度，希望挑选“工期长些、报价低些”的伙伴以降低整个工程总费用. 定理指出：如果单位时间拖期罚款额 $\beta^*\geqslant r^*E$，则这一“拖长工期以降低费用”策略是不可取的.

显然，本文结论对PSP的进一步分析与求解同样具有重要的意义.

参考文献：

[1] Maloni M J, Benton W C. Supply chain partnerships: opportunities for operations research [J]. European Journal of operational Research, 1997, 101(3): 419-429.

[2] Chang P C, Lee H C. A two-phase approach for single machine scheduling: minimizing the total absolute deviation [J]. Journal of the Chinese Institute of Engineers, 1992, 15(6): 735-742.

[3] Abdul-Razaq T S, Potts C N. Dynamic programming state-space relaxation for single-machine scheduling [J]. Journal of Operational Research Society, 1998, 39(2): 141-152.

[4] 李乃成，靖稳峰，徐宗本. 虚拟企业管理中的伙伴选择问题：模型与理论分析[J]. 运筹学学报，2005，9(2)：68-74.

（编辑　杜秀杰）