第39卷 第12期
2005年12月

西 安 交 通 大 学 学 报
JOURNAL OF XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

Vol. 39 №12
Dec. 2005

# 关于终值微分方程的解

朱传喜，叶梅燕，郭 玲
（南昌大学数学系，330047，南昌）

**摘要**：为了解决满足一个微分方程且已知终值物体运动轨迹的存在性的问题，首先证明了一个重要定理，即在一定条件下，定义于实 Banach 空间 $E$ 中的凝聚算子在 $E$ 的某个闭球中有不动点，其次研究了一类终值微分方程的解.

**关键词**：凝聚算子；不动点；终值微分方程
**中图分类号**：O175.1 **文献标识码**：A **文章编号**：0253-987X(2005)12-1384-03

## On Solutions of Terminal Value Differential Equations

*Zhu Chuanxi*，*Ye Meiyan*，*Guo Ling*
（Department of Mathematics，Nanchang University，Nanchang 330047，China）

**Abstract**：To resolve the existence of a moved object locus governed by a differential equation with a known terminal value，the theorem，that under certain conditions the condensing operator defined in real Banach space $E$ has a fixed point in a closed sphere of $E$，is proved；thus the solutions of a kind of terminal value differential equations are investigated.

**Keywords**：*condensing operator*；*fixed point*；*terminal value differential equation*

微分方程初值问题在物理中的应用非常广泛，但是对于满足一个微分方程且已知末端值的物体（导弹/飞机）运动轨迹是否存在这个问题的解决是非常重要的. 由于微分方程终值问题存在一定的难度，过去研究的人比较少，本文主要研究该问题的理论基础和应用.

设 $E_1$、$E_2$ 是两个实 Banach 空间，$D\subset E_1$，又设 $A$：$D\to E_2$ 是一个连续的有界算子. 一个算子 $A$ 称为 $D$ 上的凝聚算子，如果对任何非紧的有界集 $S\subset D$，满足 $\alpha[A(S)]<\alpha(S)$，其中 $\alpha$ 表示非紧性测度[1-5]. $C^1[a,b]$表示从定义域$[a,b]$到值域$[a,b]$上具有一阶连续导函数的全体所成集合.

在上述物理问题或信息科学理论中得到了一类终值微分方程如下

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x) & x\in R^n,t\in[a,b]\\ x(b)=x_1\end{cases}$$

为了解决上述满足一个微分方程且已知末端值的物体（导弹/飞机）运动轨迹是否存在的问题，我们研究该类终值微分方程，首先证明下面的定理.

**定理1** 设 $A$：$E\to E$ 是一个凝聚算子，且 $E$ 是一个实 Banach 空间，如果集合$\{x\mid x\in E,x=\lambda Ax,0<\lambda<1\}$是有界的，则 $A$ 在 $E$ 的闭球 $T$ 中必有不动点，这里 $T=\{x\mid x\in E,\ \|x\|\leqslant R\}$，$R=\sup\{\|x\|\mid x=\lambda Ax,0<\lambda<1\}$.

**证明** 令 $T_K=\left\{x\mid x\in E,\ \|x\|<R+\dfrac{1}{K}\right\}$. 假设 $A$ 在$\partial T_K$ 上没有不动点（否则存在 $x_K\in\partial T_K$，使得 $x_K=Ax_K$，定理已经获证）.

令 $h_t(x)=x-tAx$，于是在$\partial T_K$ 上，$\|x\|=R+\dfrac{1}{K}$，$\forall x\in\partial T_K$，即在$\partial T_K$ 上，$x\neq\lambda Ax$，$\lambda\in(0,1)$. 由 $R$ 的定义，$\theta\notin h_t(\partial T_K)$，$\forall\, 0\leqslant t\leqslant 1$，否则，$\theta=x-tAx$，$\forall\, x\in\partial T_K$，$t\in[0,1]$. 若$t=0$，则$x=\theta$，矛盾于

收稿日期：2005-04-14. 作者简介：朱传喜（1956～），男，教授. 基金项目：国家自然科学基金资助项目（10461007）；江西省自然科学基金资助项目（0411043）.

$\theta\in\partial T_K$. 若 $t=1$,则有 $\theta=x-Ax$, $\forall x\in\partial T_K$,即 $Ax=x$,矛盾于上面的假设($A$ 在$\partial T_K$ 上没有不动点). 因此, $x=tAx, t\in(0,1)$, $\forall x\in\partial T_K$. 由 $R$ 的定义,在$\partial T_K$ 上, $x\neq tAx, t\in(0,1)$,矛盾.

于是,根据凝聚算子拓扑度的同伦不变性可知

$$\deg(I-A,T_K,\theta)=\deg(h_1,T_K,\theta)=\deg(h_0,T_K,\theta)=\deg(I,T_K,\theta)=1\neq 0$$

因此,由凝聚算子拓扑度的可解性可知,存在 $x_*\in T_K$,使得$(I-A)x_*=0$,即 $Ax_*=x_*$,即 $A$ 在 $T_K$ 中具有不动点.

综上所述,在任何情形下,$A$ 在 $\overline{T}_K$ 中都有不动点 $x_K$,即

$$x_K=Ax_K\quad(K=1,2,3,\cdots), x_K\in\overline{T}_K\qquad(1)$$

令 $S=\{x_1,x_2,\cdots,x_K,\cdots\}$, $AS=\{Ax_1,Ax_2,\cdots,Ax_K,\cdots\}$. 由式(1)可知 $S=AS$. 根据 $A$ 的凝聚性可知$\alpha(S)=0$ (其中$\alpha$ 为非紧性测度),否则,$\alpha(S)=\alpha(AS)<\alpha(S)$,矛盾. 由 $\alpha(S)=0$ 可知 $S$ 为紧集. 于是,在 $S$ 中,存在子列 $x_{K_i}$,使 $Ax_{K_i}\to x^*\in E$,于是 $x_{K_i}=Ax_{K_i}\to x^*$. 由 $\|x_K\|\leqslant R+\dfrac{1}{K}$得 $\|x^*\|\leqslant R$. 根据 $A$ 的连续性,得 $x^*=Ax^*$.

**注 1**　与定理 1 相关的不动点问题参见文献[6-12]

**定理 2**　考察常微分方程的终值问题

$$(\mathrm{H}_1)\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x)\quad x\in R^n, t\in[a,b]\\ x(b)=x_1\end{cases}$$

若 $f:[a,b]\times R^n\to R^n$ 连续,并且满足

$$\|f(t,x)\|\leqslant M(1+\|x\|)$$
$$\forall t\in[a,b], x\in R^n$$

其中 $M$ 是某正数,则问题$(\mathrm{H}_1)$必具有属于 $C^1[a,b]$ 的解 $x(t)$,满足

$$\|x(t)\|\leqslant[\|x_1\|+M(b-a)]\mathrm{e}^{M(b-a)}$$
$$\forall t\in[a,b]$$

**证明**　显然,问题$(\mathrm{H}_1)$属于 $C^1[a,b]$的解等价于积分方程 $x(t)=x_1-\int_t^b f(s,x(s))\mathrm{d}s$ 的连续解,亦即算子 $Ax(t)=x_1-\int_t^b f(s,x(s))\mathrm{d}s$ 在连续函数空间 $C_n[a,b]=\{x(t)\mid x(\cdot):[a,b]\to R^n$ 连续$\}$ 中的不动点(注意,$C_n[a,b]$ 是 Banach 空间,其中范数 $\|x\|=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}\|x(t)\|$). 易知,$A$: $C_n[a,b]\to C_n[a,b]$是凝聚的.

我们证明

$$x(t)\in C_n[a,b],\ x(t)=\lambda Ax(t)$$
$$0<\lambda<1\Rightarrow\|x\|\leqslant M_1$$

其中 $M_1=[\|x_1\|+M(b-a)]\mathrm{e}^{M(b-a)}$. 设 $x(t)\in C_n[a,b]$满足 $x(t)=\lambda Ax(t)$, $0<\lambda<1$,于是由已知条件 $\|f(t,x)\|\leqslant M(1+\|x\|)$, $\forall t\in[a,b], x\in R^n$,可知

$$\begin{aligned}\|x(t)\|&=\|\lambda Ax(t)\|\leqslant\|Ax(t)\|\leqslant\\ &\|x_1\|+\int_t^b\|f(s,x(s))\|\mathrm{d}s\leqslant\\ &\|x_1\|+M\int_t^b(1+\|x(s)\|)\mathrm{d}s\leqslant\\ &\|x_1\|+M(b-a)+M\int_t^b\|x(s)\|\mathrm{d}s\end{aligned}\qquad(2)$$

令

$$\varphi(t)=\|x_1\|+M(b-a)+M\int_t^b\|x(s)\|\mathrm{d}s$$

由式(2)可知 $\|x(t)\|\leqslant\varphi(t)$. 又显然

$$\varphi'(t)=-M\|x(t)\|\geqslant-M\varphi(t)$$

即

$$\varphi'(t)+M\varphi(t)>0$$

即

$$\varphi'(t)\mathrm{e}^{Mt}+M\varphi(t)\mathrm{e}^{Mt}>0$$

即

$$[\varphi(t)\mathrm{e}^{Mt}]'_t>0, \forall t\in[a,b]$$

故 $\varphi(t)\mathrm{e}^{Mt}$是一个增函数,$\varphi(t)\mathrm{e}^{Mt}\leqslant\varphi(b)\mathrm{e}^{Mb}$, $a\leqslant t\leqslant b$. 所以

$$\begin{aligned}\|x(t)\|&\leqslant\varphi(t)\leqslant\varphi(b)\mathrm{e}^{M(b-t)}\leqslant\varphi(b)\mathrm{e}^{M(b-a)}=\\ &[\|x_1\|+M(b-a)]\mathrm{e}^{M(b-a)}=M_1\end{aligned}$$

即 $\|x\|\leqslant M_1$ 成立,其中

$$M_1=[\|x_1\|+M(b-a)]\mathrm{e}^{M(b-a)}$$

即

$$\|x\|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}\|x(t)\|\leqslant M_1$$

显然 $M_1$ 有界. 从定理 1 可知,$A$ 在 $C_n[a,b]$中有一个不动点.

因此,终值微分方程问题$(\mathrm{H}_1)$有一个解 $x\in C^1[a,b]$满足 $\|x(t)\|\leqslant[\|x_1\|+M(b-a)]\cdot\mathrm{e}^{M(b-a)}$, $\forall t\in[a,b]$.

**参考文献:**

[1] 郭大均. 非线性泛函分析[M]. 济南:山东科学技术出版社,1985.

[2] Eloe P W, Raffoul Y, Reid D T, et al. Positives solutions of nonlinear functional difference equations[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2001, 42(5):639-646.

[3] Chouikha A R. Remark on periodic solutions of nonlinear oscillators[J]. Applied Mathematics Letter, 2001, 14(8):963-968.

[4] Lou Bendong. Fixed points for operators in a space of continuous functions and applications[J]. Proceedings of the American Mathematical Society，1999，127(8)：2 259-2 264.

[5] Guo Dajun. Boundary value problems for impulsive integro-differential equations on unbounded domains in a Banach space[J]. Applied Mathematics and Computation，1999，99(1)：1-15.

[6] 朱传喜. 随机半闭1-集压缩算子的几个定理[J]. 数学学报，1999，42(3)：501-504.

[7] 朱传喜，徐宗本. Hilbert空间中的一类随机算子方程[J]. 数学学报，2004，47(4)：641-646.

[8] 朱传喜. 关于随机算子方程的随机解[J]. 数学进展，1997，26(5)：429-434.

[9] Zhu Chuanxi，Xu Zongben. Some theorems of random operator equations[J]. Inter J Math and Math Sci，2002，30(9)：511-514.

[10] Zhu Chuanxi. Some theorems in the X-M-PN space[J]. Appl Math and Mech，2000，21(2)：181-184.

[11] Zhu Chuanxi. Some problems in the Z-C-X space[J]. Appl Math and Mech，2002，23(8)：942-947.

[12] 朱传喜. 1-集压缩型随机算子方程若干定理[J]. 数学进展，1998，27(5)：464-468.

（编辑　杜秀杰）

## 《西安电子科技大学学报》2005年第3期目次