

# 关于终值微分方程的解

朱传喜, 叶梅燕, 郭玲

(南昌大学数学系, 330047, 南昌)

**摘要:** 为了解决满足一个微分方程且已知终值物体运动轨迹的存在性的问题, 首先证明了一个重要定理, 即在一定条件下, 定义于实 Banach 空间  $E$  中的凝聚算子在  $E$  的某个闭球中有不动点, 其次研究了一类终值微分方程的解.

**关键词:** 凝聚算子; 不动点; 终值微分方程

**中图分类号:** O175.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-987X(2005)12-1384-03

## On Solutions of Terminal Value Differential Equations

Zhu Chuanxi, Ye Meiyang, Guo Ling

(Department of Mathematics, Nanchang University, Nanchang 330047, China)

**Abstract:** To resolve the existence of a moved object locus governed by a differential equation with a known terminal value, the theorem, that under certain conditions the condensing operator defined in real Banach space  $E$  has a fixed point in a closed sphere of  $E$ , is proved; thus the solutions of a kind of terminal value differential equations are investigated.

**Keywords:** condensing operator; fixed point; terminal value differential equation

微分方程初值问题在物理中的应用非常广泛, 但是对于满足一个微分方程且已知末端值的物体(导弹/飞机)运动轨迹是否存在这个问题的解决是非常重要的. 由于微分方程终值问题存在一定的难度, 过去研究的人比较少, 本文主要研究该问题的理论基础和应用.

设  $E_1, E_2$  是两个实 Banach 空间,  $D \subset E_1$ , 又设  $A: D \rightarrow E_2$  是一个连续的有界算子. 一个算子  $A$  称为  $D$  上的凝聚算子, 如果对任何非紧的有界集  $S \subset D$ , 满足  $\alpha[A(S)] < \alpha(S)$ , 其中  $\alpha$  表示非紧性测度<sup>[1-5]</sup>.  $C^1[a, b]$  表示从定义域  $[a, b]$  到值域  $[a, b]$  上具有一阶连续导函数的全体所成集合.

在上述物理问题或信息科学理论中得到了一类终值微分方程如下

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) & x \in R^n, t \in [a, b] \\ x(b) = x_1 \end{cases}$$

为了解决上述满足一个微分方程且已知末端值的物体(导弹/飞机)运动轨迹是否存在的问题, 我们研究该类终值微分方程, 首先证明下面的定理.

**定理 1** 设  $A: E \rightarrow E$  是一个凝聚算子, 且  $E$  是一个实 Banach 空间, 如果集合  $\{x | x \in E, x = \lambda Ax, 0 < \lambda < 1\}$  是有界的, 则  $A$  在  $E$  的闭球  $T$  中必有不动点, 这里  $T = \{x | x \in E, \|x\| \leq R\}$ ,  $R = \sup\{\|x\| | x = \lambda Ax, 0 < \lambda < 1\}$ .

**证明** 令  $T_K = \left\{x | x \in E, \|x\| < R + \frac{1}{K}\right\}$ . 假设  $A$  在  $\partial T_K$  上没有不动点(否则存在  $x_K \in \partial T_K$ , 使得  $x_K = Ax_K$ , 定理已经获证).

令  $h_t(x) = x - tAx$ , 于是在  $\partial T_K$  上,  $\|x\| = R + \frac{1}{K}, \forall x \in \partial T_K$ , 即在  $\partial T_K$  上,  $x \neq \lambda Ax, \lambda \in (0, 1)$ .

由  $R$  的定义,  $\theta \notin h_t(\partial T_K), \forall 0 \leq t \leq 1$ , 否则,  $\theta = x - tAx, \forall x \in \partial T_K, t \in [0, 1]$ . 若  $t = 0$ , 则  $x = \theta$ , 矛盾于

$\theta \in \partial T_K$ . 若  $t=1$ , 则有  $\theta = x - Ax, \forall x \in \partial T_K$ , 即  $Ax = x$ , 矛盾于上面的假设 ( $A$  在  $\partial T_K$  上没有不动点). 因此,  $x = tAx, t \in (0, 1), \forall x \in \partial T_K$ . 由  $R$  的定义, 在  $\partial T_K$  上,  $x \neq tAx, t \in (0, 1)$ , 矛盾.

于是, 根据凝聚算子拓扑度的同伦不变性可知

$$\begin{aligned} \deg(I - A, T_K, \theta) &= \deg(h_1, T_K, \theta) = \\ \deg(h_0, T_K, \theta) &= \deg(I, T_K, \theta) = 1 \neq 0 \end{aligned}$$

因此, 由凝聚算子拓扑度的可解性可知, 存在  $x_* \in T_K$ , 使得  $(I - A)x_* = 0$ , 即  $Ax_* = x_*$ , 即  $A$  在  $T_K$  中具有不动点.

综上所述, 在任何情形下,  $A$  在  $\bar{T}_K$  中都有不动点  $x_K$ , 即

$$x_K = Ax_K \quad (K = 1, 2, 3, \dots), x_K \in \bar{T}_K \quad (1)$$

令  $S = \{x_1, x_2, \dots, x_K, \dots\}, AS = \{Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_K, \dots\}$ . 由式(1)可知  $S = AS$ . 根据  $A$  的凝聚性可知  $\alpha(S) = 0$  (其中  $\alpha$  为非紧性测度), 否则,  $\alpha(S) = \alpha(AS) < \alpha(S)$ , 矛盾. 由  $\alpha(S) = 0$  可知  $S$  为紧集. 于是, 在  $S$  中, 存在子列  $x_{K_i}$ , 使  $Ax_{K_i} \rightarrow x^* \in E$ , 于是  $x_{K_i} = Ax_{K_i} \rightarrow x^*$ . 由  $\|x_K\| \leq R + \frac{1}{K}$  得  $\|x^*\| \leq R$ .

根据  $A$  的连续性, 得  $x^* = Ax^*$ .

注 1 与定理 1 相关的不动点问题参见文献[6-12]

定理 2 考察常微分方程的终值问题

$$(H_1) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) & x \in R^n, t \in [a, b] \\ x(b) = x_1 \end{cases}$$

若  $f: [a, b] \times R^n \rightarrow R^n$  连续, 并且满足

$$\begin{aligned} \|f(t, x)\| &\leq M(1 + \|x\|) \\ \forall t \in [a, b], x \in R^n \end{aligned}$$

其中  $M$  是某正数, 则问题  $(H_1)$  必具有属于  $C^1[a, b]$  的解  $x(t)$ , 满足

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq [\|x_1\| + M(b-a)]e^{M(b-a)} \\ \forall t \in [a, b] \end{aligned}$$

证明 显然, 问题  $(H_1)$  属于  $C^1[a, b]$  的解等价于积分方程  $x(t) = x_1 - \int_t^b f(s, x(s)) ds$  的连续解, 亦即

算子  $Ax(t) = x_1 - \int_t^b f(s, x(s)) ds$  在连续函数空间  $C_n[a, b] = \{x(t) \mid x(\cdot): [a, b] \rightarrow R^n \text{ 连续}\}$  中的不动点 (注意,  $C_n[a, b]$  是 Banach 空间, 其中范数  $\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} \|x(t)\|$ ). 易知,  $A: C_n[a, b] \rightarrow C_n[a, b]$  是凝聚的.

我们证明

$$\begin{aligned} x(t) \in C_n[a, b], x(t) &= \lambda Ax(t) \\ 0 < \lambda < 1 \Rightarrow \|x\| &\leq M_1 \end{aligned}$$

其中  $M_1 = [\|x_1\| + M(b-a)]e^{M(b-a)}$ . 设  $x(t) \in C_n[a, b]$  满足  $x(t) = \lambda Ax(t), 0 < \lambda < 1$ , 于是由已知条件  $\|f(t, x)\| \leq M(1 + \|x\|), \forall t \in [a, b], x \in R^n$ , 可知

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &= \|\lambda Ax(t)\| \leq \|Ax(t)\| \leq \\ \|x_1\| &+ \int_t^b \|f(s, x(s))\| ds \leq \\ \|x_1\| &+ M \int_t^b (1 + \|x(s)\|) ds \leq \\ \|x_1\| &+ M(b-a) + M \int_t^b \|x(s)\| ds \quad (2) \end{aligned}$$

令

$$\varphi(t) = \|x_1\| + M(b-a) + M \int_t^b \|x(s)\| ds$$

由式(2)可知  $\|x(t)\| \leq \varphi(t)$ . 又显然

$$\varphi'(t) = -M\|x(t)\| \geq -M\varphi(t)$$

即

$$\varphi'(t) + M\varphi(t) > 0$$

即

$$\varphi'(t)e^{Mt} + M\varphi(t)e^{Mt} > 0$$

即

$$[\varphi(t)e^{Mt}]'_t > 0, \forall t \in [a, b]$$

故  $\varphi(t)e^{Mt}$  是一个增函数,  $\varphi(t)e^{Mt} \leq \varphi(b)e^{Mb}, a \leq t \leq b$ . 所以

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \varphi(t) \leq \varphi(b)e^{M(b-t)} \leq \varphi(b)e^{M(b-a)} = \\ &[\|x_1\| + M(b-a)]e^{M(b-a)} = M_1 \end{aligned}$$

即  $\|x\| \leq M_1$  成立, 其中

$$M_1 = [\|x_1\| + M(b-a)]e^{M(b-a)}$$

即

$$\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} \|x(t)\| \leq M_1$$

显然  $M_1$  有界. 从定理 1 可知,  $A$  在  $C_n[a, b]$  中有一个不动点.

因此, 终值微分方程问题  $(H_1)$  有一个解  $x \in C^1[a, b]$  满足  $\|x(t)\| \leq [\|x_1\| + M(b-a)] \cdot e^{M(b-a)}, \forall t \in [a, b]$ .

参考文献:

[1] 郭大均. 非线性泛函分析[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 1985.  
 [2] Eloe P W, Raffoul Y, Reid D T, et al. Positives solutions of nonlinear functional difference equations[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2001, 42(5): 639-646.  
 [3] Chouikha A R. Remark on periodic solutions of nonlinear oscillators[J]. Applied Mathematics Letter, 2001, 14(8): 963-968.

[4] Lou Bendong. Fixed points for operators in a space of continuous functions and applications[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1999,127(8): 2 259-2 264.

[5] Guo Dajun. Boundary value problems for impulsive integro-differential equations on unbounded domains in a Banach space[J]. Applied Mathematics and Computation,1999, 99(1):1-15.

[6] 朱传喜. 随机半闭 1-集压缩算子的几个定理[J]. 数学学报, 1999, 42(3):501-504.

[7] 朱传喜,徐宗本. Hilbert 空间中的一类随机算子方程[J]. 数学学报, 2004, 47(4):641-646.

[8] 朱传喜. 关于随机算子方程的随机解[J]. 数学进展, 1997, 26(5):429-434.

[9] Zhu Chuanxi, Xu Zongben. Some theorems of random operator equations[J]. Inter J Math and Math Sci, 2002,30(9):511-514.

[10] Zhu Chuanxi. Some theorems in the X-M-PN space [J]. Appl Math and Mech, 2000, 21(2):181-184.

[11] Zhu Chuanxi. Some problems in the Z-C-X space[J]. Appl Math and Mech, 2002,23(8):942-947.

[12] 朱传喜. 1-集压缩型随机算子方程若干定理[J]. 数学进展, 1998, 27(5):464-468.

(编辑 杜秀杰)

### 《西安电子科技大学学报》2005 年第 3 期目次

大型星载天线展开机构中同步齿轮系防卡滞研究 ..... 陈建军,张建国,段宝岩,等(329)

基于凸集模型的多学科耦合系统不确定性分析 ..... 曹鸿钧,段宝岩(335)

以改进影像逼真度为约束条件的变换域水印嵌入强度 ..... 尹忠海,简剑峰,周利华,等(339)

一种结合 ML 检测的高性能 V-BLAST 系统..... 苏 昕,孙永军,易克初(344)

基于 MOSFET 失配分析的低压高精度 CMOS 带隙基准源 ..... 刘帘曦,杨银堂,朱樟明(348)

镁在钙钛矿型氧敏材料中的作用 ..... 曹全喜,邓亮雄,杨 鹏,等(353)

直扩分层空时结构在下行衰落相关 MIMO 中的应用 ..... 李勇朝,廖桂生,王 峰(357)

接收端驱动的流媒体组播拥塞控制协议 ..... 张 冰,徐雅嫣,刘增基,等(362)

基于衬底驱动技术的亚 1V 与温度成正比基准源 ..... 朱樟明,杨银堂(367)

基于小波变换的多分辨率高维图像检索方法..... 崔江涛,孙君顶,周利华(370)

基于四阶累积量的多参数联合估计算法..... 王兰美,王洪洋,廖桂生(374)

基于分数迟延估计的外辐射源雷达杂波相消算法 ..... 王 俊,水鹏朗,保 铮,等(378)

一种多目标情况下的单脉冲测角方法..... 赵永波,谷 泓,张守宏(383)

利用码元约束技术消除 OFDM 系统中的限幅噪声 ..... 杨 刚,陈媛媛,李玉山(387)

基于微扫描的焦平面阵列成像特性研究 ..... 王晓蕊,胡方明,张建奇,等(392)

碳化硅 CMOS 倒相器温度特性 ..... 王 平,杨银堂,王 旭(396)

一种基于 D-S 理论的 P2P 网络信任模型 ..... 温浩宇,任小龙,徐国华(400)

基于 FPGA 的红外图像目标检测 ..... 王 艳,鲍建跃,林晓春,等(403)

粗糙面电磁散射的小斜率近似方法研究 ..... 郭立新,陈建军,韦国晖,等(408)

大型目标 RCS 的快速计算及分析 ..... 李建瀛,唐 松,刘其中(414)

利用有效的求逆算法快速计算超椭圆曲线标量乘..... 郝艳华,姜正涛,王育民(418)

基于有限域的最佳周期交织方法 ..... 王 莹,王育民(423)

m-挠群上一种基于身份的聚合签名方案 ..... 程相国,刘景美,王新梅(427)

基于自对准和空气桥工艺的 SiGe HBT 研究 ..... 刘道广,郝 跃,徐世六,等(432)

跟踪及数据中继卫星系统瞄准式干扰的最佳干扰波形 ..... 李 鹏,姬红兵(435)

基于 BP 神经网络的车型分类器 ..... 胡方明,简 琴,张秀君(439)

彩色电视信号的旁瓣抑制..... 孙晓闻,刘立东,吴顺君(443)

一种针对复值信号的独立分量分析方法..... 李小军,楼顺天,张贤达(447)

基于表单译码的软 GMD 算法 ..... 徐朝军,王新梅(452)