第39卷 第12期 西 安 交 通 大 学 学 报 Vol.39 №12
2005年12月 JOURNAL OF XI′AN JIAOTONG UNIVERSITY Dec. 2005

多时滞不确定系统的非脆弱 H_∞ 鲁棒控制

李钢生， 屈百达，黄 俊
（江南大学控制科学与工程研究中心，214122，无锡）

摘要：针对一类复杂的多时滞不确定系统，在控制器增益存在加性和乘性两种摄动形式时，分别设计了非脆弱 H_∞ 鲁棒控制器，利用构造的 Lyapunov 函数和线性矩阵不等式，证明并给出了非脆弱 H_∞ 鲁棒控制问题有解的充分条件。所设计的控制器使系统具有鲁棒性，能满足所给 H_∞ 范数指标，而且当控制器增益参数变化时，系统性能指标同样能够满足要求。该系统对环境参数的变化具有更好的适应能力。算例仿真结果表明，系统对不确定参数变化及控制器增益摄动都具有鲁棒性，对大幅度的干扰波动具有很强的抗扰动能力。

关键词：多时滞；不确定；非脆弱；H_∞ 鲁棒控制；线性矩阵不等式
中图分类号：TP13 **文献标识码**：A **文章编号**：0253-987X(2005)12-1349-04

Non-Fragile H_∞ Robust Control for Uncertain Systems with Multiple Time Delay

R$ F%' *:, -" * ，32 / %$6%，9 2%' * [2"
(Control Science and Engineering Research Center，Southern Yangtze University，Wuxi 214122，China)

Abstract：The non-fragile H_∞ robust controller was designed for a class of complex uncertain systems with multiple delay time under additive and multiplicative perturbations of controller gain. A sufficient condition for the solvability of the non-fragile H_∞ robust control problem was proved and presented by a proper Lyapunov function and linear matrix inequalities. The systems under action of the given controller are robust and satisfy H_∞ performance，moreover，also satisfy proper performance when controller changes，and thus have better adaptability against variety of the environment parameters. Simulation results illustrate that the systems are robust to both the uncertainty of parameters and perturbations of controller gain，meanwhile，have the ability to attenuate the large scope disturbance.

Keywords：8 2(7$=(- 7$8- 6-(%@；2">57%$" : @7- 8 ；"&"<；5%*$(- ；H_∞ 5&2:7>&"75&(；($"-%5 8%75$? $"-<]2%($7$- :。

当前，对时滞问题的研究已取得了许多进展[1,2]，利用现有结论能够设计出使系统鲁棒稳定，且满足相应指标的控制器．但是，由于 A/D、D/A 的转换精度以及计算时的舍入误差等原因，控制器的参数存在一定变化，造成系统不稳定，性能下降[3]，这样的控制器是脆弱的[4]。控制器的设计不仅要使系统是鲁棒稳定的，而且本身还应该是非脆弱的。文献[3-5]利用二次稳定理论和线性矩阵不等式(LMI)，分别研究了一类单时滞系统的非脆弱鲁棒 H_∞ 控制问题，而关于多时滞不确定系统的非脆弱鲁棒 H_∞ 控制问题，还未见相关报导。

本文针对一类多时滞不确定系统，考虑控制器存在摄动时的非脆弱 H_∞ 鲁棒控制问题，在控制器存在加性和乘性两种形式的摄动时，分别设计了相应的非脆弱 H_∞ 鲁棒控制器，所得结果以线性矩阵不等式的形式给出。

1 问题的描述

考虑如下形式的多时滞不确定系统

收稿日期：2005-04-19。 作者简介：李钢生(1977～)，男，硕士生；屈百达(联系人)，男，教授。 基金项目：国家科技部“十五”攻关项目(2001BA204B01-03)。

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t) &= [A_0+\Delta A_0(t)]x(t)+\\ &\sum_{i=1}^{k}[A_i+\Delta A_i]x(t-d_i)+B_1w(t)+B_2u(t)\\ z(t)&=Cx(t)\\ x(t)&=\Phi(t),\ t\in[-\tau,0]\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

式中：$x(t)\in R^n$ 是系统的状态变量；$u(t)\in R^m$ 是控制输入；$z(t)\in R^l$ 是被控输出；$w(t)\in L_2[0,\infty)$ 是干扰输入；$A_i(i=0,1,\cdots,k)$、B_1、B_2、C 是已知的适当维数矩阵；$\tau_i(i=1,\cdots,k)$ 是给定的时滞常数；$\Phi(t)$ 是连续的初始向量函数；$\tau=\max(\tau_1,\cdots,\tau_k)$；$\Delta A_i(i=0,\cdots,k)$ 是不确定矩阵，满足 $\Delta A=D_i\cdot F_i(x,t)E_i(i=0,1,\cdots,k)$，其中 D_i、E_i 是已知的适当维数的矩阵，F_i 是 Lebesgue 可测且有界的矩阵，满足 $F_i^{\mathrm T}F_i\leqslant I$。

考虑如下形式的状态反馈控制器

$$u(t)=(K+\Delta K)x(t)\qquad(2)$$

式中：K 表示控制器增益；ΔK 表示增益的摄动。本文考虑如下两种形式的摄动。

（1）加法式摄动

$$\Delta K=H_1F_tG_1,\quad F_t^{\mathrm T}F_t\leqslant I\qquad(3)$$

（2）乘法式摄动

$$\Delta K=H_2F_tG_2K,\quad F_t^{\mathrm T}F_t\leqslant I\qquad(4)$$

式中：H_1、H_2、G_1 和 G_2 是具有适当维数的常数矩阵；F_t 是未知的扰动矩阵。

本文的目的是设计满足系统式（1）的、形如式（2）的控制器，使得如下闭环系统满足鲁棒稳定性和 $\|z(t)\|_2<\gamma\|w(t)\|_2$。

闭环系统为

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t)&=\bar{A}_c x(t)+\sum_{i=1}^{k}\bar{A}_i x(t-\tau_i)+B_1w(t)\\ z(t)&=Cx(t)\\ x(t)&=\Phi(t),\ t\in[-\tau,0]\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

式中：$\bar{A}_c=A_0+\Delta A_0(t)+B_2(K+\Delta K)$；$\bar{A}_i=A_i+\Delta A_i$。

引理1　给定矩阵 A、D、E 及满足 $F^{\mathrm T}F\leqslant I$ 的矩阵 F，则有：

（1）对任意的标量常数 $\varepsilon>0$

$$DFE+E^{\mathrm T}F^{\mathrm T}D^{\mathrm T}\leqslant\varepsilon^{-1}DD^{\mathrm T}+\varepsilon E^{\mathrm T}E\qquad(6)$$

（2）对任意的矩阵 $P>0$ 及标量 $\varepsilon>0$，满足 $P-\varepsilon DD^{\mathrm T}>0$

$$\begin{aligned}(A+DFE)^{\mathrm T}P^{-1}(A+DFE)&\leqslant\\ A^{\mathrm T}(P-\varepsilon DD^{\mathrm T})^{-1}A&+\varepsilon^{-1}E^{\mathrm T}E\end{aligned}\qquad(7)$$

2　鲁棒及 H_∞ 性能分析

定理1　给定实数 $\gamma>0$，则系统式（5）是鲁棒稳定的，且 $\|z(t)\|_2\leqslant\gamma\|w(t)\|_2$，如果存在正定对称矩阵 P，矩阵 Q_i、$R_i(i=1,\cdots,k)$，使得以下 LMI 成立

$$\begin{bmatrix}T_1 & M_1 & M_2\\ M_1^{\mathrm T} & -N_1 & 0\\ M_2^{\mathrm T} & 0 & -N_2\end{bmatrix}<0\qquad(8)$$

式中

$$T_1=\bar{A}_c^{\mathrm T}P+P\bar{A}_c+\sum_{i=1}^{k}Q_i+\sum_{i=1}^{k}\tau_iR_i+C^{\mathrm T}C$$

$$N_1=\mathrm{diag}(Q_1,\cdots,Q_k),\quad N_2=\gamma^{-2}I$$

$$M_1=[P\bar{A}_1\ \ \cdots\ \ P\bar{A}_k],\quad M_2=PB_1$$

证明　首先分析鲁棒稳定性。令 $w=0$，构造如下的 Lyapunov 函数

$$V(x,t)=x^{\mathrm T}Px+\sum_{i=1}^{k}\int_{t-\tau_i}^{t}x^{\mathrm T}(s)Q_ix(s)\mathrm{d}s+\\ \sum_{i=1}^{k}\int_{-\tau_i}^{0}\int_{t+\beta}^{t}x^{\mathrm T}(\alpha)R_ix(\alpha)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$$

则有

$$\begin{aligned}\dot{V}(x,t)&=\dot{x}^{\mathrm T}Px+x^{\mathrm T}P\dot{x}+\sum_{i=1}^{k}x^{\mathrm T}Q_ix-\\ &\sum_{i=1}^{k}x^{\mathrm T}(t-\tau_i)Q_ix(t-\tau_i)+\\ &\sum_{i=1}^{k}\left(\tau_ix^{\mathrm T}R_ix-\int_{t-\tau_i}^{t}x^{\mathrm T}(\beta)R_ix(\beta)\mathrm{d}\beta\right)=\\ &\tilde{x}_1^{\mathrm T}S_1\tilde{x}_1-\int_{t-\tau_i}^{t}x^{\mathrm T}(\beta)R_ix(\beta)\mathrm{d}\beta\leqslant\tilde{x}_1^{\mathrm T}S_1\tilde{x}_1\end{aligned}\qquad(9)$$

式中

$$\tilde{x}_1^{\mathrm T}=[x^{\mathrm T}(t)\ \ x^{\mathrm T}(t-\tau_1)\ \ \cdots\ \ x^{\mathrm T}(t-\tau_k)]$$

$$S_1=\begin{bmatrix}T_0 & M_1\\ -M_1^{\mathrm T} & -N_1\end{bmatrix}$$

其中

$$T_0=\bar{A}_K^{\mathrm T}P+P\bar{A}_K+\sum_{i=1}^{k}Q_i+\sum_{i=1}^{k}\tau_iR_i$$

利用 schur 补的性质，由式（8）可得，$S_1\leqslant0$，即 $\dot{V}\leqslant0$，因此闭环系统（5）是鲁棒稳定的。

下面分析其 H_∞ 范数指标。在0初始条件下，考虑

$$J=\int_0^t(z^{\mathrm T}z-\gamma^{-2}w^{\mathrm T}w)\mathrm{d}t$$

则对任意非0的外部扰动 $w\in L_2[0,\infty)$，利用 Lyapunov 泛函和0初始条件，可以导出

$$J=\int_0^{\tau}(z^{\mathrm T}z-\gamma^{-2}w^{\mathrm T}w+\dot{V}(x))\mathrm{d}t-V(x)\leqslant$$

$$\int_0^\tau (z^{\mathrm T}z - \gamma^{-2}w^{\mathrm T}w + \dot V(x))\mathrm dt = \int_0^\tau \tilde x^{\mathrm T}S\tilde x\,\mathrm dt$$

式中

$$\tilde x^{\mathrm T} = [x^{\mathrm T}(t)\quad x^{\mathrm T}(t-d_1)\quad \cdots\quad x^{\mathrm T}(t-d_k)\quad w^{\mathrm T}(t)]$$

$$S = \begin{bmatrix} T_1 & M_1 & M_2 \\ M_1^{\mathrm T} & -N_1 & 0 \\ M_2^{\mathrm T} & 0 & -N_2 \end{bmatrix}$$

由定理条件式(8)知,有 $\Pi \leqslant 0$,即

$$\int_0^\tau z^{\mathrm T}z\,\mathrm dt < \gamma^2\int_0^\tau w^{\mathrm T}w\,\mathrm dt < \gamma^2\int_0^\infty w^{\mathrm T}w\,\mathrm dt$$

定理得证。

3　非脆弱 H_∞ 鲁棒控制律设计

以下定理给出系统式(1)非脆弱 H_∞ 鲁棒控制有解的条件及带有摄动的控制器的设计方法。

定理 2　对系统式(1)及控制器式(2),控制器增益具有式(3)形式的摄动,给定标量 $\gamma>0$,则系统是鲁棒稳定的,且 $\|z(t)\|_2 \leqslant \gamma\|w(t)\|_2$,如果存在正定对称矩阵 X,矩阵 Y、Q_i、V_i $(i=1,\cdots,k)$ 以及标量 ε_i $(i=0,1,\cdots,k)$、ε_Δ,使得以下 LMI 成立

$$\begin{bmatrix} T & M \\ M^{\mathrm T} & -N \end{bmatrix} < 0 \tag{10}$$

且不等式(10)有解时,一个所求的控制器为

$$u(t) = [K + \Delta K]x(t),\ K = YX^{-1}$$

式中

$$T = A_0X + B_2Y + (A_0X + B_2Y)^{\mathrm T} + \varepsilon_\Delta B_2H_1H_1^{\mathrm T}B_2^{\mathrm T} + \varepsilon_0D_0D_0^{\mathrm T}$$

$$M = [M_1\ \cdots\ M_8]$$

$$N = \mathrm{diag}(N_1,\cdots,N_8)$$

$$M_1 = [D_1\ \cdots\ D_k],\ M_2 = [A_1\ \cdots\ A_k]$$

$$M_3 = XE_0^{\mathrm T},\ M_4 = XG_1^{\mathrm T},\ M_5 = XC^{\mathrm T}$$

$$M_6 = B_1,\ M_7 = [\underbrace{X\ \cdots\ X}_{k}]$$

$$M_8 = [\underbrace{X\ \cdots\ X}_{k}],\ N_1 = \mathrm{diag}(\varepsilon_1I,\cdots,\varepsilon_kI)$$

$$N_2 = \mathrm{diag}((Q_1 - \varepsilon_1E_1^{\mathrm T}E_1),\cdots,(Q_k - \varepsilon_kE_k^{\mathrm T}E_k))$$

$$N_3 = \varepsilon_0I,\ N_4 = \varepsilon_\Delta I$$

$$N_5 = I,\ N_6 = \gamma^{-2}I$$

$$N_7 = \mathrm{diag}(Q_1,\cdots,Q_k)$$

$$N_8 = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{d_1}V_1,\cdots,\frac{1}{d_k}V_k\right)$$

证明　由定理 1 知系统(5)稳定,且满足 H_∞ 指标的条件是式(8)成立。根据 Schur 补的性质,式(8)等价于下式成立

$$T_2 + (\Delta A_0 + B_2\Delta K)^{\mathrm T}P + P(\Delta A_0 + B_2\Delta K) + \sum_{i=1}^{k}P(A_i + \Delta A_i)Q_i^{-1}(A_i + \Delta A_i)^{\mathrm T}P < 0 \tag{11}$$

式中

$$T_2 = (A_0 + BK)^{\mathrm T}P + P(A_0 + BK) + \sum_{i=1}^{k}Q_i + \sum_{i=1}^{k}d_iR_i + \gamma^{-2}PB_1B_1^{\mathrm T}P + C^{\mathrm T}C$$

由引理 1 可知式(11)成立,即下式成立

$$T_3 + \varepsilon_0^{-1}E_0^{\mathrm T}E_0 + \varepsilon_\Delta^{-1}G_1^{\mathrm T}G_1 + \sum_{i=1}^{k}(PA_i(Q_i - \varepsilon_iE_i^{\mathrm T}E_i)^{-1}A_i^{\mathrm T}P + \varepsilon_i^{-1}PD_iD_i^{\mathrm T}P) + \gamma^{-2}PB_1B_1^{\mathrm T}P < 0 \tag{12}$$

式中

$$T_3 = (A_0 + BK)^{\mathrm T}P + P(A_0 + BK) + \sum_{i=1}^{k}Q_i + \sum_{i=1}^{k}d_iR_i + \varepsilon_0PD_0D_0^{\mathrm T}P + \varepsilon_\Delta PBH_1H_1^{\mathrm T}B^{\mathrm T}P + C^{\mathrm T}C$$

根据 Schur 补的性质,式(12)等价于下式成立

$$\begin{bmatrix} \bar T & \bar M \\ \bar M^{\mathrm T} & -\bar N \end{bmatrix} < 0 \tag{13}$$

式中

$$\bar T = (A_0 + BK)^{\mathrm T}P + P(A_0 + BK) + \sum_{i=1}^{k}Q_i + \sum_{i=1}^{k}d_iR_i + \varepsilon_0PD_0D_0^{\mathrm T}P + \varepsilon_\Delta PBH_1H_1^{\mathrm T}B^{\mathrm T}P$$

$$\bar M = [\bar M_1\ \cdots\ \bar M_5],\ \bar N = \mathrm{diag}(\bar N_1,\cdots,\bar N_5)$$

$$\bar M_1 = [PD_1\ \cdots\ PD_k],\ \bar M_3 = E_0^{\mathrm T}$$

$$\bar M_2 = [PA_1\ \cdots\ PA_k],\ \bar M_4 = G_1^{\mathrm T}$$

$$\bar M_5 = C^{\mathrm T},\ \bar N_1 = \mathrm{diag}(\varepsilon_1I,\cdots,\varepsilon_kI)$$

$$\bar N_2 = \mathrm{diag}((Q_1 - \varepsilon_1E_1^{\mathrm T}E_1),\cdots,(Q_k - \varepsilon_kE_k^{\mathrm T}E_k))$$

$$\bar N_3 = \varepsilon_0I,\ \bar N_4 = \varepsilon_\Delta I,\ \bar N_5 = I$$

将式(13)两边同乘 $\mathrm{diag}(P^{-1},I,\cdots,I)$,令 $X = P^{-1}$,$Y = KX$,$V_i = R_i^{-1}$,利用 Schur 补的性质即可得式(10)成立。定理得证。

定理 3　对系统式(1)及控制器式(2),控制器增益具有式(4)形式的摄动,给定标量 $\gamma>0$,则系统是鲁棒稳定的,且 $\|z(t)\|_2 < \gamma\|w(t)\|_2$,如果存在正定对称矩阵 X,矩阵 Y、Q_i、V_i $(i=1,\cdots,k)$ 及标量 ε_i $(i=0,1,\cdots,k)$、ε_Δ 使得以下 LMI 成立

$$\begin{bmatrix} \hat T & \hat M \\ \hat M^{\mathrm T} & \hat N \end{bmatrix} < 0 \tag{14}$$

且不等式(14)有解时,一个所求的控制器为

$$u(t) = [K + \Delta K]x(t),\ K = YX^{-1}$$

式中

$$\hat T = A_0X + B_2Y + (A_0X + B_2Y)^{\mathrm T} +$$

$$\varepsilon_{\Delta} \boldsymbol{B}_2 \boldsymbol{H}_2 \boldsymbol{H}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}} + \varepsilon_0 \boldsymbol{D}_0 \boldsymbol{D}_0^{\mathrm{T}}$$

$$\widehat{\boldsymbol{M}} = [\boldsymbol{M}_1 \quad \boldsymbol{M}_2 \quad \boldsymbol{M}_3 \quad \widehat{\boldsymbol{M}}_4 \quad \boldsymbol{M}_5 \quad \boldsymbol{M}_6 \quad \boldsymbol{M}_7 \quad \boldsymbol{M}_8]$$

$$\widehat{\boldsymbol{N}} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{N}_1, \cdots, \boldsymbol{N}_8), \ \widehat{\boldsymbol{M}}_4 = (\boldsymbol{G}_2 \boldsymbol{Y})^{\mathrm{T}}$$

证明 该定理的证明与定理 2 的证明类似,在此省略。

4 算 例

考虑系统式(1),其参数如下

$$\boldsymbol{A}_0 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 \\ 0.8 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.6 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.8 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 0.9 & 1.5 \\ 0.6 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_3 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.8 \\ 0.5 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = [1.3 \quad 0.4], \quad \boldsymbol{E}_0 = [0.3 \quad 0.3]$$

$$\boldsymbol{D}_0 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.8 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D}_1 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D}_3 = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}_1 = [0.3 \quad 0.2], \quad \boldsymbol{E}_2 = [0.1 \quad 0.1]$$

$\boldsymbol{E}_3 = [0.2 \quad 0.4]$,取 $\alpha_1 = 0.5$,$\alpha_2 = 0.3$

$\boldsymbol{F}_0 = \boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{F}_3 = 0.2\sin t$,$\alpha_3 = 0.4$

(1)当控制器增益具有加性摄动时,取

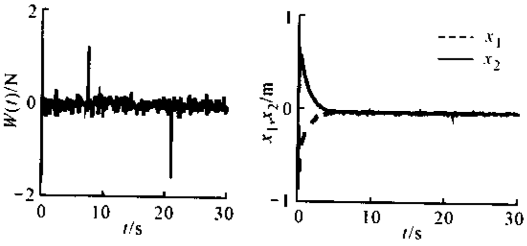
$$\boldsymbol{H} = [1 \quad 1], \quad \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{F}_{\Delta} = 0.2\sin t$$

利用 LMI 工具箱求解式(10),得到一个所求的控制器 $\boldsymbol{u}(t) = [\boldsymbol{K} + \Delta\boldsymbol{K}]\boldsymbol{x}(t)$,其中 $\boldsymbol{K} = [-26.50 \quad -18.36]$,其响应曲线如图 1 所示。

(2)当控制器增益具有乘性摄动时,取

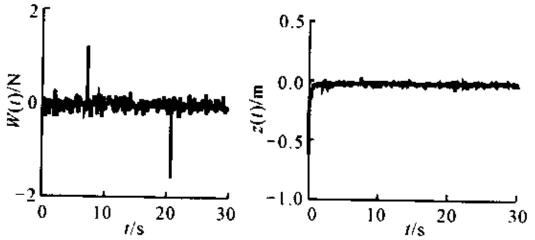
$$\boldsymbol{H} = [0.2 \quad 0.5], \quad \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{F}_{\Delta} = 0.2\sin t$$

利用 LMI 工具箱求解式(14),得到一个所求的控制器 $\boldsymbol{u}(t) = [\boldsymbol{K} + \Delta\boldsymbol{K}]\boldsymbol{x}(t)$,其中 $\boldsymbol{K} = [-33.83 \quad -15.50]$,其响应曲线如图 2 所示。



(a)干扰输入 (b)状态 x_1、x_2

图 1 加性摄动时的响应曲线



(a)干扰输入 (b)控制输出

图 2 乘性摄动时的响应曲线

仿真结果表明,设计的控制律对系统的不确定参数及控制器增益摄动都具有鲁棒性,对大幅度扰动有很好的抑制能力。

参考文献:

[1] Su N J, Su H Y, Chu J. Delay-dependent robust H_{∞} Control for uncertain time-delay systems [J]. IEE Proc-Control Theory Appl, 2003, 150(5): 489-492.

[2] Cheng Chuwang, Sun Youxian, Tang Bingyong. Robust H_2 control of uncertain linear system with multiple state delays-LMI [J]. Approach, Journal of China Textile University, 1998, 15(3): 46-49.

[3] 王 武, 杨富文. 线形不确定系统的鲁棒非脆弱 H_2 状态反馈控制[J]. 福州大学学报(自然科学版), 2004, 32(5): 563-567.

[4] 刘 飞, 张斌武. 一类线形系统鲁棒非脆弱 H_{∞} 控制器设计[J]. 河海大学常州分校学报, 2002, 16(4): 7-11.

[5] 王 武, 杨富文. 不确定时滞系统的时滞依赖鲁棒非脆弱 H_{∞} 控制[J]. 控制理论与应用, 2003, 20(3): 473-476.

(编辑 刘 杨)