第 39 卷　第 12 期　　西安交通大学学报　　Vol. 39　№12
2005 年 12 月　　JOURNAL OF XI′AN JIAOTONG UNIVERSITY　　Dec. 2005

关于占线广播调度问题的一个下界

徐寅峰，郑斐峰
（西安交通大学管理学院，710049，西安）

摘要：通过研究带有时限的占线广播调度问题及其贪婪算法竞争比为 5、确定性算法的竞争比下界为 2.59，来剖析所有请求均为紧时限的特殊情形，并运用最坏情形分析法分析得出，在任意一个连续中断的序列中最大中断比具有逐渐减小的变化特征，进而证明了在所有可能的两类连续中断序列中都不可能存在竞争比小于 4 的确定性算法. 由此得出，当请求均为紧时限时，竞争比下界为 4. 由于紧时限是任意时限的一个特例，从而得出请求为任意时限时的竞争比下界至少为 4 的结论.

关键词：广播调度；确定性算法；竞争比；中断比
中图分类号：TP393　**文献标识码**：A　**文章编号**：0253-987X(2005)12-1291-04

On Lower Bound of On-Line Broadcast Scheduling Problem

Xu Yinfeng，*Zheng Feifeng*
(School of Management，Xi′an Jiaotong University，Xi′an 710049，China)

Abstract：Through studying of on-line broadcast scheduling problem with deadlines and with competitive ratio and its lower bound to be 5 and 2.59 by greedy and deterministic algorithm respectively，a special case that all requests have tight deadlines was analyzed. By analyzing the worst case，it was obtained that the sequence of maximal abortion ratio has traits which are decreasing gradually in a continuous abortion sequence. Then it is shown that there is no deterministic algorithm，in which the competitive ratio is less than 4 in all possible two kinds of abortion sequences. Hence it is concluded that for the special case above the lower bound of competitive ratio is 4，and it leads to that for general case of arbitrary deadline the lower bound of competitive ratio is at least 4.

Keywords：*broadcast scheduling*；*deterministic algorithm*；*competitive ratio*；*abortion ratio*

随着网络、电子等技术的发展，广播调度在许多应用领域中发挥着重要的作用. 广播调度主要分为两大类：第 1 类是推动式调度，即单向的信息服务方式，例如 GPS 系统、各类综合信息服务系统等；第 2 类是拉动式调度[1,2]，其主要特征是服务方根据需求方的请求特征实时地调整广播的信息内容，从而使广播服务于更多的客户，或者使重要的信息得以及时传达. 在实际中，请求往往具有很强的实时性，因而带有请求时限的占线拉动式广播调度显得更为重要[3,4]. Kim 等人分析了数据均为单位长度、请求随时到达、广播可随时中断与重启的模型[5]，并得出目标函数能最大满足请求的总数量. Chan 等人证明了文献[5]中贪婪算法的竞争比为 5，并证明了此问题的下界是 2.59[6].

本文的主要工作是，证明了文献[5]的模型具有确定性算法，其竞争比下界为 4，特别是当所有请求均为紧时限时的竞争比下界为 4.

1　问题描述与基本定义

本文讨论的问题与文献[5]相同，即在服务器数据库中所有数据均为单位长度，客户请求随时到达且广播可随时中断，同时假定所有请求均是紧时限

收稿日期：2005-03-09.　作者简介：徐寅峰(1962～)，男，教授，博士生导师.　基金项目：国家自然科学基金资助项目(10371094,70471035).

的.

根据紧时限的假设,如果某条数据被完整广播,则在广播启动的那一刻,对该数据的所有请求均可满足;如果广播被中断,则不能满足当前的所有请求.问题是,服务器何时广播哪一条数据或判定是否中断广播,使得在一个时间段内能够满足客户的请求数量为最多.

占线算法的性能一般用竞争比来衡量,该竞争比定义如下:对于收益最大化问题,设 S 为该问题的所有可能的输入,B 为某一占线算法,P 为该问题的离线最优算法,并用$|B_s|$、$|P_s|$分别表示对于某一种输入 s $(s\in S)$的 2 种算法的收益值,则竞争比

$$r=\sup_{s\in S}\{|P_s|/|B_s|\}$$

即取所有输入中离线最优算法与占线算法收益之比的最大值.

占线问题中的确定性算法是指算法每次均以 1 的概率采取某一行动,比如在本文中确定性算法在任意时刻以 1 的概率广播某条数据或中断某次广播.对于占线广播调度问题的任意确定性算法 A,必须利用中断功能它才可能是竞争性的.因为,对某条数据当新到的请求数量是当前服务请求数量的 x 倍时,若 A 不中断当前广播,P 将选择中断并开始为新到的请求提供服务(此后不再有新到的请求),则 P 所满足的请求数量等于A 的x 倍.由于 x 可以是任意实数,则 A 不可能是竞争的.因此,任何一个竞争算法必须利用中断功能.

令 $T=\{t_0,t_1,\cdots,t_m\}$表示占线算法 A 在 $t_i(i=1,\cdots,m)$时刻中断当前服务并开始广播新数据的一个时间序列,其中在 t_0 时刻启动第 1 次广播服务,在 t_m 时刻完成第 1 次广播.由于前 m 次广播均被中断,因此 $0<t_i-t_{i-1}<1$.

令 R_i、$|R_i|$分别表示 A 从 t_i 时刻开始广播数据的请求及其数量,如果 P 从 $t_i+\omega_i(0<\omega_i<t_{i+1}-t_i)$ 时刻开始广播一条数据,那么可用 R_i^o、$|R_i^o|$分别表示该数据所对应的请求及其数量.

令$|R_{\Delta i}^A|$表示截止 t_i+1 时刻算法 A 所满足的请求数量,$|R_{\Delta i}^o|$表示在 t_i+1 之前(不包括 t_i+1 时刻)P 启动服务后累计的请求数量.由于 P 是最优算法,因此它将完成它启动的所有服务,即 P 不会中断任何广播.

令 $r_i=|R_{i+1}|/|R_i|$表示 A 在 t_{i+1}时刻的中断比,若$|R_i|$是中断广播所包含的请求数量,$|R_{i+1}|$是新广播所包含的请求数量,则 $r_i^{\max}$ 表示在保证A 的某一竞争比的前提下,r_i 可以达到的最大值.

对于上述问题的最坏情形是,R_{i+1} 总是在 R_{i-1}^o 已经完成,在 R_i^o已经开始,而在 R_i 尚未完成之前到来,这样使得 P 启动的广播得以完成,而 A 启动的广播除了最后一次以外均被中断,同时$|R_i^o|<|R_{i+1}|$必须成立,因此当 R_i^{opt}在 $t_i+\omega_i$ 时刻到来时,A 不会中断R_i.基于此,对所有的 i,假设等式

$$|R_i^o|=r_i|R_i|-1=|R_{i+1}|-1 \tag{1}$$

成立.为方便讨论,假定 $r_i|R_i|$为整数,并且除 $r_i^{\max}\leqslant 1$ 的情形之外式(1)始终成立.如果$|R_{\Delta m}^A|=|R_m|$,结合 $0<t_i-t_{i-1}<1$,在$[t_0,t_m+1)$区间 P 只能启动$m+1$ 次广播,即$|R_{\Delta m}^o|=\sum\limits_{j=0}^{m}|R_j^o|$.

2 竞争比下界分析

下面将证明确定性算法的竞争比下界.为了便于表述,首先定义以下 2 个函数,即

$$F(m)=\sum_{j=m}^{1}1\Big/\prod_{f=m}^{j}r_f$$

$$F^{\max}(m)=\sum_{j=m}^{1}1\Big/\prod_{f=m}^{j}r_f^{\max}$$

定理 不存在一个确定性算法的竞争比小于 4.

引理 1 对于任意一个竞争比不大于 4 的确定性算法 A,给定它的前 p 次中断的中断比序列$\{r_0,r_1,\cdots,r_{p-1}\}(1<p)$,则第 $p+1$ 次中断的最大中断比满足 $r_p^{\max}=4-(1+F(p-1))$.

令$|R_{\Delta p}^A|=|R_p|$,结合式(1),有$|R_{\Delta p}^o|=\sum\limits_{j=0}^{p}|R_j^o|=(r_p+1+F(p-1))|R_p|-(p+1)$,则 $r_p+1+F(p-1)\leqslant 4$ 必须成立;否则,令 $r_p+1+F(p-1)=4+\varepsilon(\varepsilon>0)$,则$|R_{\Delta p}^o|=[4+\varepsilon-(p+1)/|R_p|]|R_p|$.只要$(p+1)/\varepsilon<|R_p|$,$A$ 的竞争比将大于 4,因此 $r_p^{\max}=4-(1+F(p-1))$.

推论 1 对于一个竞争比不大于 4 的确定性算法 A,给定 2 个可选中断比序列$\{r_0,r_1,\cdots,r_{p-1},r_p\}$和$\{r_0,r_1,\cdots,r'_{p-1},r'_p\}$,若 $r'_{p-1}<r_{p-1}$,则有 $r'^{\max}_p<r_p^{\max}$.

引理 2 给定任意一个竞争比不大于 4 的确定性算法 A,对于所有 $i\geqslant 0$,有 $r_i^{\max}=(2i+4)/(i+1)$,$r_{i+1}^{\max}<r_i^{\max}$,$\lim\limits_{i\to\infty^+}r_i=2$.

首先证明 $r_0^{\max}=4$.设$|R_{\Delta 0}^A|=|R_0|$,即 A 在$t_0\sim t_0+1$ 时段满足服务请求 R_0,根据式(1),$|R_{\Delta 0}^o|=|R_0^o|=r_0|R_0|-1$,则 $r_0\leqslant 4$ 必须成立;否则,令 $r_0=$

$4+\varepsilon(\varepsilon>0)$,则 $|R_{\Delta 0}^o|=r_0|R_0|-1=(4+\varepsilon-1/|R_0|)|R_0|$. 只要 $|R_0|>1/\varepsilon$,则 $|R_{\Delta 0}^o|/|R_{\Delta 0}^A|>4$,这与 A 的竞争比不大于 4 的结论相矛盾.

类似地证明,$r_1^{\max}=3$. 设 $|R_{\Delta 1}^A|=|R_1|$,则 $|R_{\Delta 1}^o|=|R_1^o|+|R_0^o|=(r_1+1)|R_1|-2$,$r_1+1\leqslant 4$ 必须成立;否则,令 $r_1=3+\varepsilon$,则 $|R_{\Delta 1}^o|=(4+\varepsilon-2/|R_1|)\cdot|R_1|$. 只要 $R_1>2/\varepsilon$,就有 $|R_{\Delta 1}^o|/|R_{\Delta 1}^A|>4$,即 A 的竞争比大于 4.

对于 $r_2^{\max}$,由引理 1 知,$r_2^{\max}=4-(1+1/r_1)\leqslant 3-1/r_1^{\max}=8/3$. 假设

$$r_i^{\max}=4-(1+F^{\max}(i-1))=\frac{2i+4}{i+1}$$

成立,由引理 1 可得

$$r_{i+1}^{\max}=4-(1+F^{\max}(i))=3-\frac{1}{r_i^{\max}}(1+F^{\max}(i-1))=3-\left(\frac{i+1}{2i+4}\right)\left(\frac{2i}{i+1}\right)=\frac{2i+6}{i+2}$$

所以,$r_i^{\max}=(2i+4)/(i+1)$ 成立. 引理的后半部分可由前半部分的结论直接推出.

推论 2　对任意一个竞争比不大于 4 的确定性算法 A,给定一个中断比序列 $\{r_0,r_1,\cdots,r_{i-1},r_i,r_{i+1}\}$,只要 $r_i\neq 2(i=0,1,2,\cdots)$,则有 $r_{i+1}^{\max}<r_i^{\max}$.

引理 3　给定一个确定性算法 A,如果存在某个 $k(k\geqslant 0)$,使得对所有 $i\geqslant k$ 均有 $r_i=r_i^{\max}\geqslant 2$ 成立,则 A 的竞争比不小于 4.

首先证明,如果 $r_i=r_i^{\max}=2(i\geqslant k)$,则 A 的竞争比不小于 4.

设 A 的竞争比为 $4-\zeta(\zeta>0)$,令 $|R_{\Delta m}^A|=|R_m|=2^{m-k}|R_k|(m>k)$,则有

$$|R_{\Delta m}^o|=\sum_{j=0}^{m}|R_j^o|=\sum_{j=0}^{k-1}|R_j^o|+\sum_{j=k}^{m}(2|R_j|-1)=\sum_{j=0}^{k-1}|R_j^o|+4\left(1-\frac{1}{2^{m-k+1}}\right)|R_m|-(m-k+1)=\left(4-\zeta+\zeta+\frac{\sum_{j=0}^{k-1}|R_j^o|-2|R_k|-(m-k+1)}{|R_m|}\right)|R_m|$$

而

$$\zeta+\frac{\sum_{j=0}^{k-1}|R_j^o|-2|R_k|-(m-k+1)}{2^{m-k}|R_k|}>0$$

成立的条件是 m 应足够大,从而得到 $|R_{\Delta m}^o|/|R_{\Delta m}^A|>4-\zeta$,即 A 的竞争比大于 $4-\zeta$.

其次证明,如果 $r_i=r_i^{\max}>2(i\geqslant k)$,则 A 的竞争比不小于 4.

设 A 的竞争比为 $4-\zeta(\zeta>0)$,根据引理 2 有 $\lim\limits_{i\to\infty^+}r_i=2$,则必存在一个 $p(p>k)$ 使得 $r_p=r_p^{\max}=2+\varepsilon_1(\varepsilon_1\to 0^+)$,$r_{p+m}=r_{p+m}^{\max}=2+\varepsilon_2(\varepsilon_2\to 0^+,\varepsilon_2<\varepsilon_1)$,且 $\delta=\zeta-\dfrac{2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)-\varepsilon_1\varepsilon_2}{1+\varepsilon_1}>0$ 成立. 令 $|R_{\Delta p+m}^A|=|R_{p+m}|$,则

$$|R_{\Delta p+m}^o|=\sum_{j=0}^{p+m}|R_j^o|=\sum_{j=0}^{p-1}|R_j^o|+\sum_{j=p}^{p+m}|R_j^o|\geqslant\frac{2+\varepsilon_2}{1-(1/(2+\varepsilon_1))}\left(1-\frac{1}{(2+\varepsilon_1)^{m+1}}\right)|R_{p+m}|-(m+1)=\left(4-\zeta+\delta-\frac{2+\varepsilon_2}{(1+\varepsilon_1)(2+\varepsilon_1)^m}-\frac{m+1}{|R_{p+m}|}\right)|R_{p+m}|$$

其中,第 1 个不等式成立是由于 $\sum_{j=0}^{p-1}|R_{t_j}^o|\geqslant 0$ 且 $r_{p+m}<r_i<r_p(p+1\leqslant i\leqslant p+m-1)$. 只要 m 和 $|R_{p+m}|$ 足够大,$\delta-\dfrac{2+\varepsilon_2}{(1+\varepsilon_1)(2+\varepsilon_1)^m}-\dfrac{m+1}{|R_{p+m}|}>0$ 必定成立. 所以,$|R_{\Delta p+m}^o|/|R_{\Delta p+m}^A|>4-\zeta$,即 A 的竞争比大于 $4-\zeta$.

引理 4　给定一个确定性算法 A,如果存在某个 $k(k>0)$ 使得 $r_k^{\max}<2$ 成立,则 A 不可能是竞争性算法.

根据推论 2,如果 $r_k^{\max}<2$,则 $r_{i+1}^{\max}<r_i^{\max}<2$ 对所有的 $i\geqslant k$ 均成立.

第 1 种情况是,$r_p^{\max}\leqslant 1$ 对于某一个 $p(p>0)$ 成立. 令 $|R_{\Delta p+2m}^A|=|R_{p+2m}|$,结合推论 2 有 $|R_{\Delta p+2m}^o|=\sum_{j=0}^{m}|R_{p+2j}|\geqslant(m+1)|R_{p+2m}|$. 由于 m 可任意大,因此在这种情况下 A 不是竞争性的.

第 2 种情况是,$r_k^{\max}<2$ 对某一个 k 成立. 只需证明存在一个 $p(k<p)$ 使得 $r_p^{\max}\leqslant 1$ 成立. 设 $r_k^{\max}=2-\theta(0<\theta<1)$,根据引理 1,$r_k^{\max}=4-(1+F(k-1))=2-\theta$,解之得 $F(k-1)=1+\theta$,则 $r_{k+1}^{\max}=4-(1+F(k))=4-\left[1+\dfrac{1}{r_k^{\max}}(1+F(k-1))\right]=2-\dfrac{\theta}{1-\theta/2}$,且 $F(k)=1+\dfrac{\theta}{1-\theta/2}$. 在 $r_k^{\max}$ 的表达式中,若将 $r_k^{\max}$ 换成 $r_k(r_k<r_k^{\max})$,结合推论 1 必定有 $r_{k+1}^{\max}<2-\dfrac{\theta}{1-\theta/2}$. 因此,为使得 $r_{i+1}^{\max}$ 最大,对所有 $i\geqslant k$ 令 $r_i=r_i^{\max}$.

假设 $r_{p-1}^{\max}=2-\dfrac{\theta}{1-(p-k-1)\theta/2}$ 且 $F(p-$

$2)=1+\dfrac{\theta}{1-(p-k-1)\theta/2}$，则 $r_p^{\max}=4-(1+F(p-1))=4-\left[1+\dfrac{1}{r_{p-1}^{\max}}(1+F(p-2))\right]=2-\dfrac{\theta}{1-(p-k)\theta/2}$，且 $F(p-1)=\dfrac{1}{r_{p-1}^{\max}}(1+F(p-2))=1+\dfrac{\theta}{1-(p-k)\theta/2}$. 只要 $p\geqslant\dfrac{2}{\theta}+k-2$，则 $1\leqslant\dfrac{\theta}{1-(p-k)\theta/2}$以及 $r_p^{\max}\leqslant 1$，故 A 不是竞争性的.

结合引理 3 和引理 4，可证得定理成立.

3　结论与展望

对于占线广播调度问题，竞争比上界是指当前所设计的最优调度算法所达到的竞争比，该值越小越好. 竞争比下界是指所有可能的算法能实现的最小竞争比，该值越大越好. 当上下界相同时，表明已经找到了最优的占线调度算法，也就是问题可以完全解决了. 因此，改进占线广播调度问题的竞争比上下界，对于指导设计有效的调度算法以及衡量设计算法的竞争性能都是十分有意义的.

文献[5]中的贪婪算法被证得竞争比为 5，即竞争比上界为 5，文献[6]证明该问题确定性算法的竞争比下界为 2.59，而本文在分析了一个广播中断序列的每一个中断比 r_i 所满足的一些基本性质的同时，还分 2 种情况分析了 $r_i<2$ 是否存在，并证明了相应引理的合理性，进而得出确定性广播调度算法的下界为 4 的结论. 本文的研究结果大大缩小了上下界之间的距离，并表明不可能存在确定性算法具有竞争比小于 4 的情况. 上下界之间会有一定的距离，如何改进算法使其竞争比小于 5 或者提高竞争比下界，还需要进一步研究.

参考文献：

[1] Kalyanasundaram B, Pruhs K, Velauthapillai M. Scheduling broadcasts in wireless networks [J]. Journal of Scheduling, 2000, 4(6):339-354.

[2] Kenyon C, Schabanel N. The data broadcast problem with non-uniform transmission times [J]. Algorithmica, 2003, 35(2):146-175.

[3] Kalyanasundaram B, Velauthapillai M. On-demand broadcasting under deadline [A]. 11th Annual European Symposium on Algorithms (ESA), Budapest, Hungary, 2003.

[4] Acharya S, Muthukrishnan S. Scheduling on-demand broadcasts: new metrics and algorithms [A]. ACM/IEEE International Conference on Mobile Computing and Networking, Dallas, USA, 1998.

[5] Kim J H, Chwa K Y. Scheduling broadcasts with deadlines [A]. 9th Annual International Conference on Computing and Combinatories, Big Sky, USA, 2003.

[6] Chan W T, Lam T W, Ting H F, et al. New results on on-demand broadcasting with deadline via job scheduling with cancellation [A]. 10th Annual International Computing and Combinatorics, Jeju Island, Korea, 2004.

（编辑　苗　凌）

我校国家自然科学基金工作取得新进展

2005 年 9 月 22 日，国家自然科学基金委员会公布了 2005 年度国家自然科学基金项目评审结果. 我校国家自然科学基金项目在四年连续增长的良好态势下，今年又取得新的较大进展，国家自然科学基金面上项目在保持稳步增长的同时，国家自然科学基金重点项目实现较大突破. 2005 年我校申报国家自然科学基金各类项目共计 795 项，获准各类资助项目合计 151 项，基中面上项目 140 项、重点项目 6 项，创新研究群体项目 1 项(已通过专家评审)，国家杰出青年基金 2 项、海外青年学者合作研究基金 2 项. 重点项目主持人分别是蒋庄德教授、郭烈锦教授、徐可为教授、荣命哲教授、徐宗本教授和张淳民教授. 荣命哲教授和徐寅峰教授荣获国家杰出青年科学基金项目资助. 徐卓教授和冯宗宪教授作为合作者获得海外青年学者合作研究基金资助. 在团队建设方面，继人工智能与机器人研究所、管理学院获国家自然科学基金创新研究群体基金资助之后，由郭烈锦教授带领的研究团队获得了我校第三个创新研究群体基金(已通过专家评审). 另外，今年我校在交叉学科的项目申报也取得了良好成绩. 徐宗本教授在管理科学部获得一项管理与信息交叉领域的重点项目，张淳民教授在地球科学部获得一项地球物理与光信息交叉领域的重点项目，实现了我校在地球科学部重点项目零突破.

（撰稿人：董康宁）