

# 半解析方法中圆形等效源法的前处理算法

郑 镁<sup>1</sup>, 焦 松<sup>1</sup>, 裘晓宁<sup>2</sup>

(1. 西安交通大学机械工程学院, 710049, 西安; 2. 西安远东教育集团, 710077, 西安)

**摘要:** 应用计算机图形学的原理和方法, 提出了一种求解数学上极值问题的扫描-生长算法, 解决了二维场的圆形分割问题. 该算法能够快速确定分割区域中多个极点(各分割圆的圆心)的位置和数量, 达到了用尽量少的圆形数来最大限度地充满该分割区域, 并能满足在需要处(如场量突变处)进行局部加密的要求. 根据为广义多极技术(属半解析法范畴)创建的理论体系, 这些极点确定了解函数在级数展开式中各变量的起点. 正因为这些变量的准确定位, 不仅克服了广义多极技术中极点位置设置的盲目性, 而且提高了解的计算效率和计算精度. 因此, 扫描-生长算法还可推广应用于轴对称场的计算中.

**关键词:** 圆形等效源法; 前处理算法; 半解析方法

**中图分类号:** TM391 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-987X(2005)09-0925-03

## Pre-Processing Algorithm of Circular Equivalent Source Method in Half-Analytical Method

Zheng Mei<sup>1</sup>, Jiao Song<sup>1</sup>, Qiu Xiaoning<sup>2</sup>

(1. School of Mechanical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;

2. Xi'an Yuandong Education Group, Xi'an 710077, China)

**Abstract:** Based on the principle and method of computer graphics, a "scan-and-grow" algorithm is proposed to solve circular cutting problems of a 2D-field, where the number and positions of the poles expressing the centers of cutting circles can be determined quickly and the goal of using the minimum circle number to cover the maximum field region surface can also be satisfied. Moreover, the number of circles near a singular point of the field can be increased locally. According to the theory created for the generalized multi-pole technique (in domain of half-analytical method), the center of each circle is determined as a starting point of each variable in a series expansion of the 2D-field solution function, and the arranging blank of the starting points in the generalized multi-pole technique can be filled up owing to the precise variable positioning. It is expected to extend this algorithm to the calculation of axisymmetrical fields.

**Keywords:** circular equivalent source method; pre-processing algorithm; half-analytical method

在众多物理场的计算过程中, 涌现出了许多计算方法. 目前, 除了有些解析法尚能发挥一些作用外, 起主导作用的仍是数值计算方法. 数值计算方法有很多, 其中以有限元法、边界元法和积分方程等方法为代表, 可以求解许多问题, 使用也很方便, 并且有的已形成了相当成熟的商用软件包, 因此应用十分广泛. 然而, 尽管数值计算方法相对于解析法有解题能力强的优点, 但也存在着离散解占用计算机资

源多且缺乏通用性和预见性等缺点, 因此在电磁场领域内, 人们在 20 世纪 80 年代提出多级技术后, 又于 20 世纪 90 年代统一称为广义多极技术. 广义多极技术的优点在于其解函数的通解由级数表达, 因此能够克服数值计算中离散解的缺点, 实际上, 广义多极技术属于半解析法的范畴.

由于过去对广义多极技术缺乏系统的理论研究, 因此其通解的级数表达式不够广泛, 即意味着求

解的问题不够广泛,加之级数表达式中变量起点(极点)的位置和数量也多凭人们的经验来确定,所以其计算精度在很大程度上受使用者经验的约束.近年来,研究人员分别从偏微分方程和积分方程出发,通过采用不同的数学理论和物理原理,经过严格的理论推导和推理,提出了多极理论<sup>[1]</sup>和圆形(或球形)等效源法<sup>[2]</sup>,为半解析法创建了理论体系,从理论上克服了用广义多极技术解题时的局限性和极点位置设置的盲目性.

为了尽快将圆形等效源法推向市场,本文在研制应用软件包时,根据为半解析法创建的理论体系,提出了扫描-生长算法,完成了圆形等效源法的前处理,其功能主要是实现二维场的圆形分割.它要求采用尽量少的圆形数来最大限度地充满被分割区域,且在场强突变或奇点附近进行局部加密.可以看出,扫描-生长算法实现过程的本质是要确定当前被分割区域(不断变化)中最大面积的圆形位置,也就是数学中的极值问题.相对于有限元法中的前处理剖分,等效源法中对前处理圆形分割的要求较高,因此实现难度也较大.

本文提出的扫描-生长算法可以完成的功能为:无界场计算中圆形等效源的分割;单连域内部场计算中圆形等效源的分割;多连域内部场计算中圆形等效源的分割.

## 1 扫描-生长算法的构思及实施步骤

对于任意二维场域,其边界形状多种多样,但从几何学的角度看,任何形状的边界都可由直线、圆弧和圆拟合.直线、圆弧和圆都为基本的简单集合元素,不仅能用方程式表示它们的形状,而且还能提供元素的位置信息.为了便于描述,本文将分割出来的圆形等效源称之为虚拟圆,由于它自身就是圆形,因此很容易将其与构成边界形状的几何元素进行比较.在本文提出的前处理算法中,根据圆形等效源法的要求,必须使分割出的虚拟圆位于一定的范围内.为了让最少的虚拟圆尽可能来填满被分割的区域,而且不能让虚拟圆彼此重叠和相交,则必须将所生成的虚拟圆与边界和已有的虚拟圆进行比较.另外,为了提高计算效率和保证精度,还需在场域奇点附近适当加密分割数.

本文提出的扫描-生长算法正是基于上述思想构造的,下面是扫描-生长算法的具体实施步骤.

步骤1 构造一个外接矩形扫描区(计算内部场时,尚需构造一个外接虚拟圆).该扫描区包含整个被分

割区或局部加密分割区,并由此来确定扫描区的位置和大小,即确定 $(x_{\min}, y_{\min})$ 和 $(x_{\max}, y_{\max})$ 坐标.

步骤2 确定扫描顺序、扫描起点和扫描参数.扫描区可按直角坐标方式扫描,也可按极坐标方式扫描.前者需确定沿 $x$ 方向和 $y$ 方向的扫描步长,即 $\Delta x$ 和 $\Delta y$ ,后者需确定 $\rho$ 和 $\theta$ 方向的扫描步长,即 $\Delta\rho$ 和 $\Delta\theta$ ,扫描起点可在扫描区内任意指定.

步骤3 设置虚拟圆生长参数.当确定了扫描点位于被分割的区域内后,以该点为中心作虚拟圆,该圆半径由小到大“生长”,并达到最大的可能值,为此需确定起始圆的半径 $r_{\min}$ 和半径的生长步长 $\Delta r$ .

步骤4 判断扫描点位置.本文采用改进的交点计数检验法<sup>[3]</sup>来判断扫描点是否落在被分割的区域内.由于被分割区域是由直线、圆弧和圆组成的,因此判断时需将扫描点和各部分边界分别进行比较判断,若当前扫描点不在分割区域内,则增加一个扫描步长再判断新扫描点的位置,直至该扫描点被判定位于被分割区域内部为止.

步骤5 确定局部虚拟圆的圆心和半径.以步骤4中判定的扫描点为圆心,以 $r_{\min}$ 为半径作虚拟圆,然后判定该圆是否超出被分割区域中的各个边界<sup>[4]</sup>,若不超出,则生长该虚拟圆,其半径为 $r_{\min} + \Delta r$ ,然后再进行判断,直至确认该虚拟圆越出被分割区域的任一边界为止.记录超出分割边界前一步时的虚拟圆圆心和虚拟圆半径,作为此局部虚拟圆的半径.进入下一个扫描点,重复步骤4和步骤5.

步骤6 确定全局虚拟圆的圆心和半径.遍历扫描区域中各局部虚拟圆,取半径最大的虚拟圆作为当前扫描区域中的一个全局虚拟圆,记录其圆心坐标和半径值,同时将全局虚拟圆的边界作为分割区域的又一边界.

步骤7 重复步骤4~步骤6,记录所有全局虚拟圆的圆心坐标,这些圆心坐标便是圆形等效源法中所需要的极点坐标,也就是解函数通解中各变量起点的坐标.例如,若被分割区域内有 $m$ 个全局虚拟圆,则在无界场计算中其通解的级数展开式为

$$u_o = A + \sum_{p=1}^m [(d_{op} \ln r_{op} + \sum_{n=1}^{\infty} r_{op}^{-n} (b_{opn} \sin n\varphi_{op} + c_{opn} \cos n\varphi_{op}))] \quad (1)$$

在单连域或多联域内部场中通解的级数展开式为

$$u_i = c + \sum_{n=1}^{\infty} r_i^n (a_n \sin n\varphi_i + c_n \cos n\varphi_i) + \sum_{p=1}^m [(d_{op} \ln r_{op} + \sum_{n=1}^{\infty} r_{op}^{-n} (b_{opn} \sin n\varphi_{op} + d_{opn} \cos n\varphi_{op}))] \quad (2)$$

式中:  $r_i$  代表场域中极点(又称内极)和场点之间的距离;  $r_{op}$  表示第  $p$  个虚拟圆的圆心(又称外极)和场点之间的距离;  $\varphi_{op}$  代表  $r_{op}$  和  $x$  轴之间的夹角;  $A$ 、 $c$ 、 $d_{op}$ 、 $b_{op}$ 、 $c_{op}$ 、 $d_{op}$ 、 $a_{in}$  和  $c_{in}$  均为待定系数。

在广义多极技术中,  $r_{op}$  的起点往往是凭经验确定,或者是从大量计算结果中由归纳出来的定性规律来确定的,而不像圆形等效源法那样通过上述寻找极值的过程再加以确定。由此可见,圆形等效源法有理论依据,而广义多极技术仅是一种不够完善的技术,因此本文算法既有理论意义又有实用价值。

## 2 扫描-生长算法的流程框图及应用举例

为实现二维场的扫描-生长算法,本文开发了C++源程序,其流程框图如图1所示。

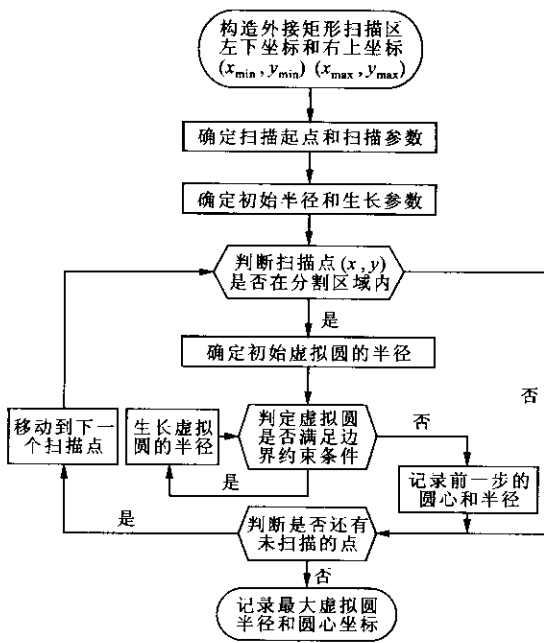


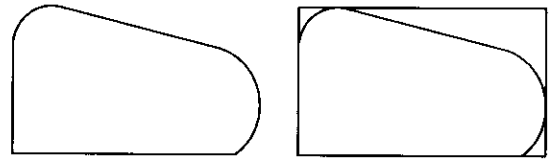
图1 全局虚拟圆分割流程图

为验证扫描-生长算法,已实现了多种二维场的圆形分割,现举例如下。

例1 在无界场计算中,其场域位于场域边界之外,它的全局虚拟圆分割过程如图2所示。

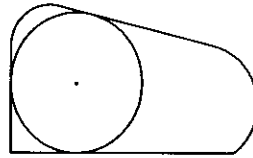
例2 在单连域内部场计算中,其场域位于场域边界之内,它的全局虚拟圆分割如图3所示。

例3 在多连域内部场计算中,其场域位于场域的外边界之内和内边界之外,它的全局虚拟圆分割如图4所示。

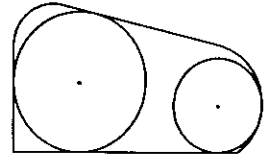


(a)场域边界

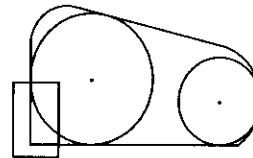
(b)构造外接矩形扫描区



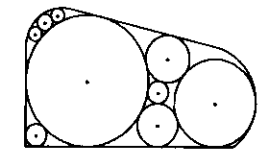
(c)生成第1个全局虚拟圆



(d)生成第2个全局虚拟圆



(e)设置局部加密区

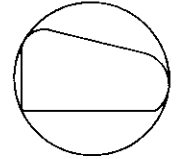


(f)最终分割结果

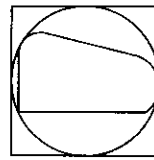
图2 无界场的全局虚拟圆分割



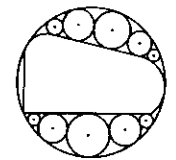
(a)单连域边界



(b)设置外接虚拟圆

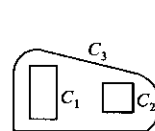


(c)构造外接矩形扫描区

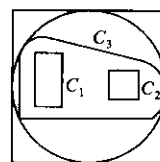


(d)最终分割结果

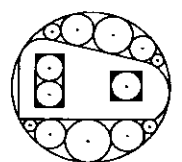
图3 单连域内部场的全局虚拟圆分割



(a)多连域边界



(b)构造外接虚拟圆和外接矩形扫描区



(c)最终分割结果

$C_1$ 、 $C_2$ : 内边界;  $C_3$ : 外边界

图4 多连域内部场的全局虚拟圆分割

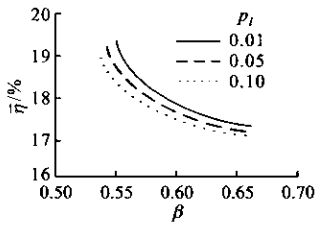


图7  $\bar{\eta}$ 、 $p_i$  与  $\beta$  之间的关系曲线

由图7可以看出,  $p_i$  越小则  $\bar{\eta}$  越大, 这是由于  $p_i$  越小,  $\eta$  的波动位置越靠近于对优质品隶属度高的区域, 因此优质率就越高. 如果  $\beta$  越大则  $\bar{\eta}$  越小, 这是由于  $\beta$  越大, 设计可行域即最优解的可选择区域就越小, 因此设计人员可以根据所期望的设计方案的优质率和可行性, 来灵活地设定  $p_i$ 、 $\beta$  的值, 从而获得满意的健壮设计解. 另外, 本例如果采用基于模糊概率的健壮设计方法, 则需要用随机模拟法来评估迭代点处质量特性和约束可行的健壮性, 这将是非常费时的. 例如, 用蒙特卡罗随机模拟法评估  $B$  的可行健壮性时, 为了保证算法的收敛, 在每个迭代点平均需要计算  $B$  的值  $10^4$  次, 而用基于最大可能点的分位数求解算法仅平均需要计算 80 次, 因此采用该方法可大大提高计算的效率.

## 5 结论

在工程实际中, 模糊信息总是普遍存在的, 因此模糊健壮设计比传统健壮设计更接近于工程实际, 且具有广阔的应用前景. 本文提出的望大特性与望

小特性的模糊健壮设计新方法, 克服了现有模糊健壮设计方法的不足, 不仅能方便地处理设计问题中的模糊因素, 有效地保证质量特性的健壮性和设计约束的可行健壮性, 而且能取得比较满意的求解效率和灵活性. 实例分析表明, 本文方法对解决模糊健壮设计问题是行之有效和切实可行的.

## 参考文献:

- [1] 黄洪钟. 机械模糊优化原理及应用[M]. 北京: 科学出版社, 1997. 6-9.
- [2] Taguchi G. Taguchi on robust technology development: bringing quality engineering upstream [M]. New York: ASME Press, 1993. 10-89.
- [3] 陈立周. 稳健设计[M]. 北京: 机械工业出版社, 1999. 1-10.
- [4] 郭惠昕. 模糊目标与模糊约束时的稳健设计研究[J]. 西安交通大学学报, 2002, 36(1): 66-69.
- [5] 郭惠昕. 望大望小特性设计目标的模糊稳健优化设计方法[J]. 西安交通大学学报, 2002, 36(5): 532-536.
- [6] 陈立周. 机械优化设计方法[M]. 北京: 冶金工业出版社, 1995. 16-25.
- [7] Du X. Efficient methods for engineering design under uncertainty [D]. Chicago: School of Mechanical Engineering of the University of Illinois at Chicago, 2002.

(编辑 管咏梅)

(上接第 927 页)

## 3 结论

(1) 本文根据为广义多极技术(属半解析法范畴)创建的理论体系, 提出了一种适用面较为广泛的虚拟圆分割算法, 该算法可以确定开域场、单连域内部场和多连域内部场在半解析法计算中所需的内极和外极的数量, 及其圆心的准确位置坐标.

(2) 本算法实现了以尽量少的虚拟圆来填满尽可能多的被分割区域, 且能在场量突变处进行局部加密, 实质上是根据计算机图形学的原理和方法, 提出的一种求解数学极值问题的算法.

(3) 本算法可以在轴对称场的计算中推广应

用.

## 参考文献:

- [1] 郑勤红, 盛剑霓. 二维静态电场分析的多极理论[J]. 电工技术学报, 1996, 11(5): 28-31.
- [2] 闫照文, 盛剑霓. 轴对称涡流场的新型等效源法[J]. 电工电能新技术学报, 1999, 18(3): 45-48.
- [3] 孙家广. 计算机图形学[M]. 第3版. 北京: 清华大学出版社, 1998. 417.
- [4] 陈建春. 矢量图形系统开发与编程[M]. 北京: 电子工业出版社, 2004. 332-394.

(编辑 管咏梅)