

# 一种简化的对数最大后验概率译码算法

张 琳, 余顺争

(中山大学信息科学与技术学院, 510275, 广州)

**摘要:** 提出了一种简化的对数最大后验概率译码算法。该简化算法基于逼近理论, 用最佳平方逼近多项式近似计算校正函数, 近似多项式的系数根据特征定理确定。与原算法相比, 简化算法具有低复杂度、译码延时少的优点。仿真结果表明: 计算复杂度比原算法降低约 30%; 在加性白高斯噪声信道和平坦慢衰落瑞利信道上, 其编码增益比求最大值对数最大后验概率译码算法高出 0.3~0.5 dB, 与原算法相近。因此, 简化算法可替代对数最大后验概率译码算法在 Turbo 码译码器中使用。

**关键词:** 对数最大后验概率译码; Turbo 码; 简化

**中图分类号:** TN911.22 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-987X(2005)08-0867-04

## Simplified Log Maximum A Posteriori Algorithm

Zhang Lin, Yu Shunzheng

(School of Information Science and Technology, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

**Abstract:** A simplified log maximum a posteriori (Log-MAP) algorithm is presented based on approximation theory. In the simplified algorithm, the optimal square approximation polynomial, whose coefficients are derived from the characteristic equations, is adopted to calculate the correction function. Compared with the original algorithm, the proposed algorithm has advantages of low complexity and lower decoding delay. It is shown that the complexity is reduced by about 30%. The performances of the simplified Log-MAP algorithm are simulated over additive white Gaussian noise channel and flat fading Rayleigh channel. It is demonstrated that the coding gain of the simplified algorithm is 0.3-0.5 dB higher than that of Max-Log-MAP one, and is similar to that of Log-MAP Turbo decoder. It is concluded that the simplified algorithm is a better compromise between the complexity and the performance, and can be a substitute for Log-MAP algorithm in Turbo decoders.

**Keywords:** *log maximum a posteriori decoding; Turbo code; simplification*

目前, 对数最大后验概率 (Log Maximum A Posteriori, Log-MAP) 和求最大值对数最大后验概率 (Maximum Log Maximum A Posteriori, Max-Log-MAP) 算法已成为 Turbo 译码器主要的两种软输入软输出算法。这两种算法都在对数域中对接收比特进行最大似然译码。Log-MAP Turbo 译码器对度量值进行精确计算, 而 Max-Log-MAP 算法则忽略校正函数, 仅用求最大值运算近似计算度量值, 因而前者纠错编码增益比后者高 0.3~0.5 dB。然

而, 在 Log-MAP 译码器中, 校正函数中蕴含的指数和对数函数大大提高了 Log-MAP 译码器的计算复杂度<sup>[1]</sup>, 不利于实时译码。

最近几年, 众多研究学者在 Log-MAP 算法的简化 (尤其是在校正函数的低计算复杂度实现) 方面<sup>[2-6]</sup>进行了大量的研究工作, 其中最重要的研究进展就是用一维查询表来近似计算校正函数。查询表建立的越细致, 译码性就越逼近精确计算结果, 但同时 Log-MAP 译码器所需额外添加的存放查询表

的存贮单元数也会增多,从而增加了译码器的成本. 本文提出了一种简化的 Log-MAP 算法. 该算法运用拟合逼近理论,采用多项式来替代校正函数的计算,由于算法中只存在加法和乘法运算,因此大大减少了计算量,且不必增加额外的存贮空间.

## 1 对数最大后验概率算法

标准 Log-MAP 算法对接收的每个比特进行最大后验概率检测. 在时刻  $k$ , 信息位  $d_k$  的似然对数比(Likelihood Logarithm Ratio, LLR)可以用前向度量  $\alpha_k^i(m)$ 、后向度量  $\beta_k^i(m)$  和分支度量  $\gamma_i(R_k, m, m')$  计算得到<sup>[1]</sup>

$$\Lambda(d_k) = \ln \sum_{m'} \sum_m \sum_{i=0}^1 \exp(\gamma_i(R_k, m', m) + \alpha_{k-1}^i(m') + \beta_k^i(m)) - \ln \sum_{m'} \sum_m \sum_{i=0}^1 \exp(\gamma_0(R_k, m', m) + \alpha_{k-1}^i(m') + \beta_k^i(m)) \quad (1)$$

式中:上标  $i$  为支路编号,与接收的“0”和“1”值对应; $m$  和  $m'$  表示存贮器状态; $R_k = (x_k, y_k)$  表示接收数据,其中  $x_k$  和  $y_k$  分别是系统信息和校验信息.

对  $\alpha_k^i(m)$  和  $\beta_k^i(m)$  分别进行递归计算,即

$$\alpha_k^i(m) = \ln \{ \exp[\alpha_{k-1}^0(S_b^0(m)) + \gamma_i(R_k, m, S_b^0(m))] + \exp[\alpha_{k-1}^1(S_b^1(m)) + \gamma_i(R_k, m, S_b^1(m))] \} \quad (2)$$

$$\beta_k^i(m) = \ln \{ \exp[\beta_{k+1}^0(S_f^0(m)) + \gamma_i(R_{k+1}, S_f^0(m), m)] + \exp[\beta_{k+1}^1(S_f^1(m)) + \gamma_i(R_{k+1}, S_f^1(m), m)] \} \quad (3)$$

式中: $S_b^i(m)$  和  $S_f^i(m)$  分别表示  $m$  的最后一状态和前一状态.

在 Turbo 译码器中, $\gamma_i(R_k, m, m')$  的值与无线信道的转移概率、编码器的状态转移概率和成员译码器之间传递的信息(称为外部信息)的统计特性有关. 在平坦慢衰落信道上,有

$$\gamma_i(R_k, m, m') = \frac{a_k}{\sigma^2} x_k + \frac{1}{\sigma_z^2} z_k (2d_k - 1) + \frac{a_k}{\sigma^2} y_k (2Y_{i,m} - 1) + r(m | m')$$

式中: $\sigma^2$  为接收数据的方差; $z_k$  表示外部信息; $\sigma_z^2$  为  $z_k$  的方差; $a_k$  为信道的衰落幅度; $Y_{i,m}$  是对应于  $i = d_k$ 、 $m$  状态的编码器输出数据; $r(m | m')$  为状态  $m$  和状态  $m'$  的连续状态值,如果连续,则  $r(m | m') = 0$ ,否则  $r(m | m') = \infty$ .

根据 Jacobian 定理,对数函数的计算可以拆分

为校正函数和求最大值运算

$$\ln \left[ \sum_{i=1}^2 \exp(\delta_i) \right] = \max(\delta_1, \delta_2) + \ln [1 + \exp(-|\delta_1 - \delta_2|)] = \max(\delta_1, \delta_2) + f_c(|\delta_1 - \delta_2|) \quad (4)$$

式中: $\delta_1$  和  $\delta_2$  是函数的参量; $f_c(\cdot)$  表示校正函数,该函数中仍存在指数和对数运算,是对数函数计算量的主要部分; $\ln [\exp(\delta_1) + \exp(\delta_2) + \dots + \exp(\delta_n)]$  可以通过递归运算得到,令  $\Delta = \exp(\delta_1) + \exp(\delta_2) + \dots + \exp(\delta_{n-1})$ ,  $\delta = \ln \Delta$ , 则

$$\ln [\exp(\delta_1) + \exp(\delta_2) + \dots + \exp(\delta_n)] = \ln [\Delta + \exp(\delta_n)] = \max(\ln \Delta, \delta_n) + f_c(|\ln \Delta - \delta_n|) = \max(\delta, \delta_n) + f_c(|\delta - \delta_n|) \quad (5)$$

将式(4)和式(5)应用于式(1)~式(3),并忽略校正函数,即度量和 LLR 的计算只需进行求最大值运算,就可得到 Max-Log-MAP 算法. Max-Log-MAP 算法的计算复杂度较低,但编码增益降低了 0.3~0.5 dB<sup>[3]</sup>,这对于频谱有限、功率受限的无线通信系统而言,无疑是不利的. 为此,众多学者对  $f_c(\cdot)$  的低复杂度实现方法进行了研究. 迄今为止,最具代表性的是查询表法. 尽管使用查询表来计算校正函数可以取得较好的性能,但查询运算要求额外的存贮单元,增加了 Turbo 译码器的成本,因此希望能够找到一种方法,不仅可以尽可能地逼近校正函数,而且易于硬件实现. 为此,本文提出用拟合逼近来近似计算校正函数,即拟合逼近对数最大后验概率(Fitted Log Maximum A Posteriori, F-Log-MAP)算法.

## 2 拟合逼近对数最大后验概率算法

数学上,常采用逼近理论来获取初等函数的近似公式,以取代指数函数、幂函数、对数函数等复杂计算. 在通信、机械等工程应用中,希望近似公式能够在确保精度的基础上,计算量越小越好. 算法的简化原则是减少计算量,并尽可能将指数和对数运算转化为求最大值、乘法、加法、查询等运算. 本文采用只存在乘法和加法的代数多项式来逼近校正函数(其他的如三角多项式、有理分式等逼近方式与多项式等价,但考虑到硬件较难实现,不予采用).

根据多项式的逼近误差,多项式逼近方式分为 3 类:①插值多项式;②一致逼近多项式;③平方逼近多项式. 上述 3 种逼近方式都可以实现函数的逼近. 在相同的逼近精度下,插值多项式的计算量较

大,换言之,若三者的计算量相同,则插值多项式的逼近精度较低<sup>[7]</sup>,而其余两种逼近方式的逼近精度相近,因而本文只采用最佳平方逼近多项式来近似计算校正函数.在 F-Log-MAP 算法中,只要确定出多项式系数,即可计算前、后向度量和分支度量,由于不需建立查询表,因此不必在译码器中添加额外的存储单元.

根据最佳平方逼近多项式的特征定理,可以将确定多项式的过程归结为求解线性代数方程组  $Gy = ay$ ,其中  $G$  为 Gram 行列式, $a$  为逼近多项式  $g_c(x)$  的系数, $y$  表示  $f_c(x)$  与  $g_c(x)$  的内积.令  $x = |\delta_1 - \delta_2|$ ,则式(4)可表示为

$$\ln\left(\sum_{i=1}^2 \exp(\delta_i)\right) = \max(\delta_1, \delta_2) +$$

$$\ln(1 + \exp(-x)) = \max(\delta_1, \delta_2) + f_c(x)$$

鉴于当  $|x| \geq 4$  时,  $f_c(x) < 2 \times 10^{-2}$ ,为简化计算,对于  $|x| \geq 4$ ,  $g_c(x) \approx 0$ ,即函数逼近区间为  $[0, 4]$ .在该区间上求解方程组,可以确定  $\ln[1 + \exp(-x)]$  的最佳平方逼近多项式为

$$f_c(x) \approx 0.6782 - 0.3920x + 0.0576x^2 = g_c(x), \quad |x| \leq 4 \quad (6)$$

由上所述,式(2)和式(3)中的校正函数可以用下式近似计算

$$\ln\left[\sum_{i=1}^2 \exp(\delta_i)\right] = \begin{cases} \max(\delta_1, \delta_2) & x > 4 \\ \max(\delta_1, \delta_2) + 0.6782 - 0.3920x + 0.0576x^2 & \text{其他} \end{cases} \quad (7)$$

当  $x > 4$  时,F-Log-MAP 算法的计算量与 Max-Log-MAP 算法相同,当  $x \leq 4$  时,F-Log-MAP 算法中只添加了少量的乘法和加法运算,计算量要比 Log-MAP 算法中的指数运算少得多.对 3 种软输入软输出算法计算复杂度的精确分析结果如表 1 所示.

表 1 算法复杂度比较

运算类型	算法复杂度		
	Max-Log-MAP	F-Log-MAP	Log-MAP
求最大值运算	$5 \times 2^n - 2$	$5 \times 2^n - 2$	$5 \times 2^n - 2$
加法	$10 \times 2^n + 11$	$20 \times 2^n + 7$	$15 \times 2^n + 9$
乘法	8	$10 \times 2^n + 4$	8
指数运算	0	0	$5 \times 2^n - 2$
对数运算	0	0	$5 \times 2^n - 2$

注: $n$  表示译码器中寄存器的个数.

从表 1 中可以看到,Log-MAP 算法中存在指数和对数运算,Max-Log-MAP 算法的计算量最小,而 F-Log-MAP 算法的乘法运算和加法运算较多.鉴于乘法和加法在硬件中易于实现,因此在仿真时,F-Log-MAP 算法的译码时延接近 Max-Log-MAP 算法.

### 3 仿真结果

本文对基于 Log-MAP、F-Log-MAP 和 Max-Log-MAP 算法的 Turbo 译码器的纠错性能进行了仿真.仿真采用码速为 1/3 的 CDMA2000 标准 Turbo 编码器,即编码器由 2 个相同的 RSC 并行级连而成,其中 RSC 的生成多项式为  $[1, 15/13, 17/13]$ ,寄存器的个数  $n = 3$ .系统信息和校验信息经 BPSK 调制后,送入信道中传送.数据成帧发送,帧长为 378 bit.接收端对接收信息进行迭代译码,迭代次数为 5.

首先,在 PC 机上,对接收端每帧的译码时延进行了统计(样本数为  $10^5$ ).如表 2 所示,同前述的计算复杂度分析结果一致的是:F-Log-MAP 译码器的译码时延与 Max-Log-MAP 相当,比 Log-MAP 译码器降低了约 30%.

表 2 译码时延比较

	Max-Log-MAP	F-Log-MAP	Log-MAP
每帧的处理时延/ms	277.3	284.2	402.3

其次,本文对加性白高斯噪声信道和平坦慢衰落瑞利信道上 3 种 Turbo 译码器的纠错性能进行了比较(迭代次数为 5).译码器的纠错性能用接收信息的误码率(BER)作为衡量指标.BER 和接收信息码噪比( $E_b/N_0$ )之间的关系曲线如图 1 和图 2 所示.从图中可以看到,在两种信道上,F-Log-MAP Turbo 译码器的纠错性能与 Log-MAP 相同,但编码增益比后者高了 0.3~0.5 dB.例如,在 AWGN 信道上,F-Log-MAP 译码器和 Log-MAP 译码器在码噪比为 1.6 dB 处就可实现信号的可靠传输(即误码率均为  $10^{-6}$ ),而 Max-Log-MAP 译码器实现信号可靠传输的阈值码噪比约为 1.9 dB;在平坦慢衰落瑞利信道上,F-Log-MAP、Log-MAP 和 Max-Log-MAP Turbo 译码器能够实现信息可靠传输的阈值码噪比分别约为 2.65 dB、2.65 dB 和 2.95 dB.

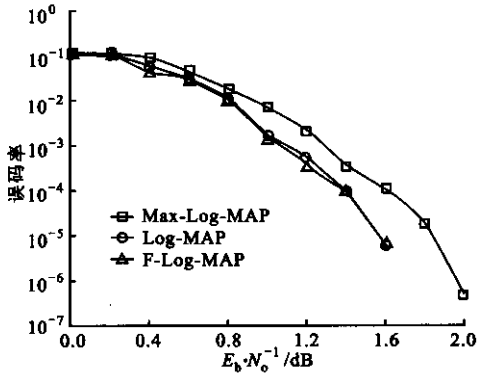


图1 AWGN信道上3种Turbo译码器的BER性能

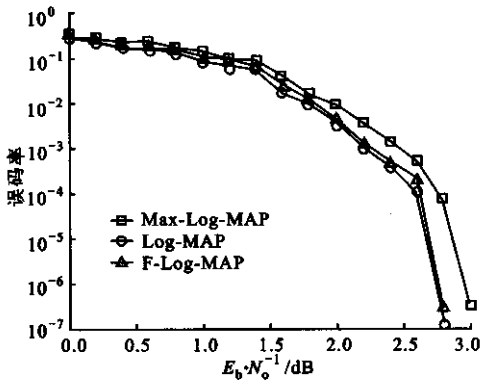


图2 平坦慢衰落瑞利信道上3种Turbo译码器的BER性能

## 4 结论

本文提出了一种简化的 Log-MAP 算法——F-Log-MAP 算法。该算法通过对校正函数进行最佳平方逼近拟合,将复杂的指数和对数运算用加法和乘法运算代替,简化了计算。本文基于 CDMA2000 标准 Turbo 编码器,对该算法在 AWGN 信道和平坦慢衰落瑞利信道上的纠错性能进行了仿真,并与 Log-MAP 算法和 Max-Log-MAP 算法进行了比较。仿真结果表明,F-Log-MAP 算法在计算复杂度和译码时延方面优于 Log-MAP 算法,而纠错性能

则优于 Max-Log-MAP 算法 0.3~0.5 dB。由于该算法只有加法和乘法运算,且性能与 Log-MAP 算法相近,因此可替代 Log-MAP 算法和 Max-Log-MAP 算法在 3G Turbo 译码器中使用。

## 参考文献:

- [1] Robertson P, Vilebrun E, Hoeher P. A comparison of optimal and sub-optimal MAP decoding algorithms operation in the log domain [A]. Proc IEEE International Conference on Communications [C]. Piscataway: IEEE, 1995. 1 009-1 013.
- [2] Viterbi A J. An intuitive justification and a simplified implementation for the MAP decoder for convolutional codes [J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 1998, 16(2): 260-264.
- [3] Wang D, Kobayashi H. Low-complexity MAP decoding for turbo codes [A]. IEEE Vehicular Technology Conference [C]. Piscataway: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc, 2000. 1 035-1 039.
- [4] Cheng J F, Ottosson T. Linearly approximated Log-MAP algorithms for turbo decoding [A]. IEEE Vehicular Technology Conference [C]. Piscataway: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc, 2000. 2 252-2 256.
- [5] Jiang S, Su S F, Xiao D L, et al. Simplification on Log-MAP algorithm and its application in Rayleigh channel [A]. IEEE Pacific Rim Conference on Communications, Computers and signal Processing [C]. Piscataway: IEEE, 2001. 231-233.
- [6] Kwak J, Park S M, Lee K. Reverse tracing of forward state metric in Log-Map and MAX-Log-MAP decoders [A]. IEEE International Symposium on Circuits and Systems [C]. Piscataway: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc, 2003. 280-283.
- [7] Maeland E. On the comparison of interpolation methods [J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1988, 7(3): 213-217.

(编辑 刘 杨)