

通量展开节块法求解六角形几何二维中子扩散方程

夏榜样, 谢仲生

(西安交通大学能源与动力工程学院, 710049, 西安)

摘要: 提出了一种在二维六角形几何节块内数值求解中子扩散方程的节块法, 节块内的各群通量分布用解析基函数近似展开, 节块之间采用面偏流 0 次矩和 1 次矩进行耦合. 为了提高计算效率, 将响应矩阵技术应用于迭代求解过程. 该方法不仅避免了常规方法中偏通量积分出现的奇异项问题, 而且具备重构六角形几何节块内精细功率分布的能力. 基于提出的模型, 发展了二维六角形组件中子扩散计算程序 FEMHEX. 通过对水水动力反应堆基准问题的校验计算表明, 该方法能高效、准确地给出有效增值因数及节块功率.

关键词: 六角形几何; 中子扩散方程; 节块法; 解析基函数

中图分类号: TL329.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-987X(2005)07-0762-04

Flux Expansion Nodal Method for Neutron Diffusion Calculation in Two-Dimensional Hexagonal Geometry

Xia Bangyang, Xie Zhongsheng

(School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: A new flux expansion nodal method for the two-group nodal diffusion calculation in the hexagonal geometry was proposed. The neutron flux distributions within a node were expanded in a series of analytic basis functions for each group. Nodes were coupled each other with both the zero-and first-order partial current moments simultaneously. The response matrix technique was used for the iterative solution of the nodal diffusion equations, which gives a fast-running scheme for the diffusion calculations. By this method, the singular terms occurring in the transverse integration methods for hexagonal geometry can be avoided and the pin power reconstruction in the nodes can be automatically accomplished. Based on the proposed model, the code FEMHEX was developed. This method was tested against two-dimensional hexagonal benchmark problems for the VVER-type reactors. The numerical results show that the core multiplication factor and nodal powers are predicted accurately.

Keywords: *hexagonal geometry; neutron diffusion equation; nodal method; analytic basis function*

在核反应堆物理设计中, 如何精确地获得反应堆内中子通量和功率的空间分布是一个重要的课题. 在过去 20 年中, 对于正方形燃料组件的反应堆, 已经发展了许多完善的先进节块法, 然而应用于六角形组件反应堆(如水水动力反应堆(VVER)、快中子增殖堆等)的先进节块法相对较少^[1-7]. 从计算结果来看, 美国西屋公司的 ANC-H 和韩国的 AFEN 是目前最为成功的 2 种方法. 本文基于节块内通量

展开的思想, 采用与文献[5]相同的展开方式, 利用满足中子扩散方程的解析基函数, 把节块内的各群通量近似展开, 但文献[5]应用面平均通量和 6 个角点通量作为耦合条件, 角点通量的求解和近似给计算带来了一定困难. 本文提出利用面平均偏流 0 次矩和 1 次矩作为节块之间的耦合条件, 并且利用响应矩阵的形式求解出射偏流 0 次矩和 1 次矩, 使得求解过程简单、高效, 并具有较高的计算精度.

1 理论模型

对于反应堆内第 n 个均匀的六角形节块,其两维、两群中子扩散方程(以下为了简便,省略了节块 n 的编号)为

$$-\nabla \Phi(\mathbf{r}) + \Lambda \Phi(\mathbf{r}) = 0 \quad (1)$$

式中: $\Phi(\mathbf{r}) = (\Phi_1(\mathbf{r}), \Phi_2(\mathbf{r}))^T$;

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \frac{\sum r_1 - k_{eff}^{-1} v \Sigma_{f_1}}{D_1} & \frac{-v \Sigma_{f_2}}{k_{eff} D_1} \\ -\frac{\Sigma_s}{D_2} & \frac{\sum r_2}{D_2} \end{bmatrix} \quad (2)$$

k_{eff} 为有效增值因数.

设 λ_g 为矩阵 Λ 的特征, e_g 为相应的特征向量,同时引入与通量 $\Phi(\mathbf{r})$ 存在以下关系的变量 $\Psi(\mathbf{r})$

$$\Phi(\mathbf{r}) = R \Psi(\mathbf{r}) \quad (3)$$

式中: $R = [e_1, e_2]$. 然后,利用式(2)、式(3)可获得以下关于 $\Psi_g(\mathbf{r})$ 的偏微分方程

$$-\nabla \Psi_g(\mathbf{r}) + \lambda_g \Psi_g(\mathbf{r}) = 0 \quad (4)$$

方程(4)为典型的 Helmholtz 方程,其通解可以写成^[5]

$$\Psi_g(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^{\infty} [A_{g1}^l \exp(\lambda_g^{1/2} k_l(\mathbf{r})) + A_{g2}^l \exp(-\lambda_g^{1/2} k_l(\mathbf{r}))] \quad (5)$$

上式中向量 k_l 为任意单位向量且满足 $k_{lx}^2 + k_{ly}^2 = 1$. 对于多群问题 λ_g 可能为复数,对于两群问题,特征值 λ_g 一定为实数.

式(5)中基函数的展开项数主要取决于问题所要求的精度和所提供的节块边界条件个数. 本文只采用 6 个面的偏流 0 次矩和 1 次矩连续作为耦合条件,故式(5)可由 12 个基函数近似展开,即

$$\Psi_g(\mathbf{r}) = \begin{cases} \sum_{l=1}^6 \{ \sinh(B_g k_l \mathbf{r}) A_{g,l} + \cosh(B_g k_l \mathbf{r}) A_{g,l+6} \} & \lambda_g > 0, \\ \sum_{l=1}^6 \{ \sin(B_g k_l \mathbf{r}) A_{g,l} + \cos(B_g k_l \mathbf{r}) A_{g,l+6} \} & \lambda_g < 0 \end{cases} \quad (6)$$

式中:向量 $k_l = \cos \theta_l k_{lx} + \sin \theta_l k_{ly}$, 选取均匀分布的 θ_l 为 $\theta_l = (2l-3)\pi/12, l=1, \dots, 6; B_g = |\lambda_g|^{1/2}$. 然后,利用式(3)、式(6),节块内的各群通量可写成如下形式

$$\Phi_g(\mathbf{r}) = \sum_{g'=1}^G r_{gg'} \Psi_{g'}(\mathbf{r}) \quad (7)$$

式中: $r_{gg'}$ 为矩阵 R 的元素.

根据 Fick 定律,面平均偏流 $\bar{J}_{g,k}^{\pm}$ (\pm 分别表示

出射偏流和入射偏流)定义为

$$\bar{J}_{g,k}^{\pm} = \frac{1}{4} \bar{\Phi}_{g,k} \pm \frac{1}{2} \bar{J}_{g,k} \quad (8)$$

式中: $\bar{\Phi}_{g,k}$ 和 $\bar{J}_{g,k}$ 分别表示面 k 的平均通量和平均净流,其计算公式分别为

$$\bar{\Phi}_{g,k} = \frac{1}{S_k} \int_{S_k} \Phi_g(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad \mathbf{r} \in S_k \quad (9)$$

$$\bar{J}_{g,k} = -\frac{D_g}{S_k} \int_{S_k} \mathbf{n}_k \cdot \nabla \Phi_g(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad \mathbf{r} \in S_k \quad (10)$$

式中: \mathbf{n}_k 为面 S_k 的外法线向量; D_g 为节块的扩散系数.

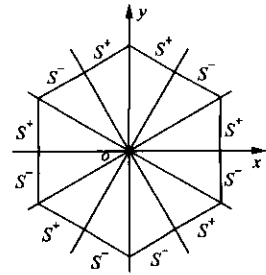
面出射和入射偏流一次矩的定义为

$$\bar{J}_{g,k}^{1,\pm} = \frac{1}{S_k} \int_{S_k} \text{sgn}(\mathbf{r}) J_{g,k}^{\pm}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad \mathbf{r} \in S_k \quad (11)$$

其中

$$\text{sgn}(\mathbf{r}) = \begin{cases} +1 & \mathbf{r} \in S_k^+ \\ -1 & \mathbf{r} \in S_k^- \end{cases} \quad (12)$$

式中: S_k^+ 和 S_k^- 分别表示面 k 的上半部分和下半部分(详见图 1).



S^+ 为上部分; S^- 为下部分

图 1 节块各面上下部分的划分

对式(11)进行积分,其结果可写成与式(8)相类似的形式,即

$$\bar{J}_{g,k}^{1,\pm} = \frac{1}{4} \bar{\Phi}_{g,k}^1 \pm \frac{1}{2} \bar{J}_{g,k}^1 \quad (13)$$

式中: $\bar{\Phi}_{g,k}^1$ 和 $\bar{J}_{g,k}^1$ 分别表示平均通量 1 次矩和平均净流 1 次矩,用下式计算

$$\bar{\Phi}_{g,k}^1 = \frac{1}{S_k} \int_{S_k} \text{sgn}(\mathbf{r}) \Phi_g(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (14)$$

$$\bar{J}_{g,k}^1 = -\frac{D_g}{S_k} \int_{S_k} \text{sgn}(\mathbf{r}) \mathbf{n}_k \cdot \nabla \Phi_g(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (15)$$

利用式(7)、式(8)、式(13)可以得到节块各面偏流 0 次矩、1 次矩与通量展开式系数的关系式,整理后可写成如下形式

$$\bar{J}_g^{\pm} = \sum_{g'=1}^G r_{gg'} Q_{gg'}^{s,\pm} A_{g'} \quad (16)$$

$$\bar{J}_g^{1,\pm} = \sum_{g'=1}^G r_{gg'} Q_{gg'}^{m,\pm} A_{g'} \quad (17)$$

式中: $\bar{J}_g^{\pm} = (\bar{J}_{g,1}^{\pm}, \bar{J}_{g,2}^{\pm}, \dots, \bar{J}_{g,6}^{\pm})^T$; $\bar{J}_g^{1,\pm} = (\bar{J}_{g,1}^{1,\pm}, \bar{J}_{g,2}^{1,\pm}, \dots, \bar{J}_{g,6}^{1,\pm})^T$; $A_{g'} = (A_{g',1}, A_{g',2}, \dots, A_{g',12})^T$; $Q_{gg'}^{s,\pm}$ 和 $Q_{gg'}^{m,\pm}$ 为 (6×12) 矩阵, 可以利用式(6)~式(15)推导出其元素的具体表达式. 合并式(16)、式(17)可得到如下新方程

$$\bar{J}^{\pm} = Q^{\pm} A \quad (18)$$

式中: $\bar{J}^{\pm} = (\bar{J}_1^{\pm}, \bar{J}_1^{1,\pm}, \bar{J}_2^{\pm}, \bar{J}_2^{1,\pm})^T$.

利用式(18)可以求出节块展开式系数

$$A = Q^{-1} \bar{J}^{-} \quad (19)$$

式中: Q^{-1} 为矩阵 Q^{-} 的逆矩阵. 把展开式系数 A 代入式(18)中, 可得到出射偏流矩与入射偏流矩的关系式, 即响应矩阵方程

$$\bar{J}^{+} = Q^{+} Q^{-1} \bar{J}^{-} \quad (20)$$

在堆芯边界, 如果堆芯边界反射率为 α , 那么下面两个边界条件成立

$$\begin{aligned} \bar{J}_{g,k}^{-} &= \beta \bar{J}_{g,k}^{+} \\ \bar{J}_{g,k}^{1,-} &= \beta \bar{J}_{g,k}^{1,+} \end{aligned} \quad (21)$$

式中: $\beta = (1 + 2\alpha) / (1 - 2\alpha)$.

利用式(19)~式(21)及以上提到的耦合条件, 构成了完整的迭代过程. 假设给定节块各面的入射偏流 0 次矩、1 次矩和 k_{eff} , 可由式(20)直接得到出射偏流矩, 不需要迭代, 故在求解过程中不存在内迭代. 在数值求解过程中, 外迭代采用粗网再平衡方法进行加速, 本文把每个节块作为一个粗网, 获得了较好的加速效果.

2 迭代求解过程

(1) 首先给出堆芯所有节块各面的出射偏流 0 次矩、1 次矩和 $k_{\text{eff}}^{(0)}$ 的值.

(2) 计算矩阵 A 的特征值 λ_g 及相应的特征向量 e_g , 构造新的矩阵 R .

(3) 更新矩阵 Q^{\pm} 以及利用式(20)更新节块各面出射偏流矩.

(4) 求解新一代节块的平均通量 $\bar{\Phi}_g$ 以及 k_{eff} .

(5) 判断是否满足收敛准则, 若满足即停止, 否则回到步骤(1).

3 计算结果

基于本文提出的模型, 发展了二维六角形组件中子扩散计算程序 FEMHEX. 为了校验模型和程序的正确性, 对文献[4]给出的二维基准问题进行了计算, 并将计算结果与 ANC-H、AFEN 等程序进行比较. 图 2 为 VVER-440 堆芯归一化功率分布, 该堆芯为 1/12 反射对称布置, 组件的对边距为 14.7 cm, 基准问题的参考解是 DIF3D 做细网差分计算的结果. 表 1 为各程序计算结果的比较, 其中 $\alpha = 0.500, 0.125$ 分别表示真空边界和真实边界. 表 1 中的计算时间 t_{cpu} 是在 Pentium-IV PC 上对基准问题做全堆芯计算获得的, 除了 VVER-440 的计算时间为 0.11 s 外, 其余基准问题的计算时间均小于 0.10 s, 可以看出该算法具有较高的计算效率.

4 结论

计算表明: 在二维六角形几何节块内, 利用扩散方程的解析基函数把节块内的各群通量展开, 能比较准确地描述节块内的通量分布; 利用面偏流 0 次矩和 1 次矩作为耦合条件, 并利用响应矩阵的形式求解出射偏流 0 次矩和 1 次矩, 能够明显降低求解的复杂性, 简化求解过程并提高计算效率, 有效改善节块耦合关系, 使该方法具有较高的精度.

表 1 各程序计算结果比较

基准问题	程序	$10^5 \times \Delta k_{\text{eff}}$	$\epsilon_{\text{max}} / \%$	$\epsilon_{\text{av}} / \%$	$t_{\text{CPU}} / \text{s}$
VVER-440 ($\alpha=0.500$)	FEMHEX	-5.0	0.51	0.15	0.11
	AFEN	22.8	1.25	0.52	—
	ANC-H	29.0	0.82	—	—
VVER-1000 ($\alpha=0.500$)	FEMHEX	5.0	0.87	0.28	0.08
	AFEN	31.8	3.75	1.52	—
	ANC-H	7.0	0.70	—	—
VVER-1000 ($\alpha=0.125$)	FEMHEX	3.0	-0.43	0.17	0.08
	AFEN	21.7	1.20	0.60	—
	ANC-H	16.0	0.70	—	—
IAEA 无反射层 ($\alpha=0.500$)	FEMHEX	17.0	0.43	0.17	0.05
	AFEN	50.1	2.31	1.10	—
	ANC-H	-7.0	0.80	—	—

续表 1

基准问题	程序	$10^5 \times \Delta k_{eff}$	$\epsilon_{max}/\%$	$\epsilon_{av}/\%$	t_{CPU}/s
IAEA 无反射层 ($\alpha=0.125$)	FEMHEX	11.0	-0.21	0.08	0.05
	AFEN	17.1	0.86	0.33	—
	ANC-H	6.0	0.50	—	—
IAEA 带反射层 ($\alpha=0.5$)	FEMHEX	-11.0	0.67	0.30	0.06
	AFEN	58.7	2.01	0.96	—
	ANC-H	-2.0	0.70	—	—
IAEA 带反射层 ($\alpha=0.125$)	FEMHEX	9.0	0.73	0.32	0.06
	AFEN	43.7	1.55	0.72	—
	ANC-H	7.0	0.50	—	—

注: Δk_{eff} 为 k_{eff} 的误差; ϵ_{max} 为最大功率误差; ϵ_{av} 为平均功率误差。

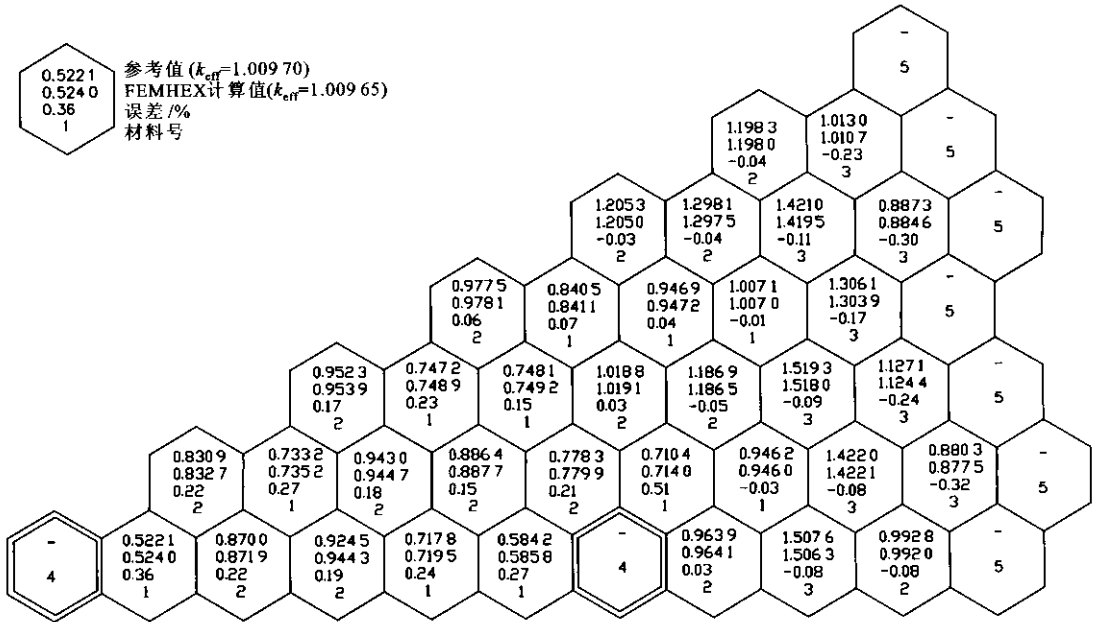


图 2 VVER-440($\alpha=0.500$)堆芯归一化功率分布

参考文献:

[1] Makai M. Symmetrics applied to reactor calculations [J]. Nucl Sci Eng, 1984, 82(3): 338-353.

[2] Arkuszewski J J. SIXTUS-2; a two dimensional multi-group diffusion code in hexagonal geometry[J]. Progress in Nuclear Energy, 1986, 18(1): 123-136.

[3] Wagner M R. Three-dimensional nodal diffusion and transport theory methods for hexagonal geometry[J]. Nucl Sci Eng, 1989, 103(4): 377-391.

[4] Chao Y A, Shatill Y A. Conformal mapping and hexagonal nodal methods-II: implementation in the ANC-H code[J]. Nucl Sci Eng, 1995, 121(2): 210-225.

[5] Cho N Z, Noh J M. Analytic function expansion nodal method for hexagonal geometry [J]. Nucl Sci Eng, 1995, 121(2): 245-253.

[6] Grundmann U, Hollstein F. A two dimensional intranodal flux expansion method for hexagonal geometry[J]. Nucl Sci Eng, 1999, 133(2): 201-212.

[7] 张少泓, 谢仲生. 对称性及多群中子扩散方程数值解 [J]. 物理学报, 2000, 49(10): 1 947-1 952.

(编辑 王焕雪)