

# 对称弧形齿线圆柱齿轮的真实齿面接触分析研究

马振群, 王小椿, 沈 兵

(西安交通大学机械工程学院, 710049, 西安)

**摘要:** 针对传统的齿面接触分析(TCA)方法在分析宽度较大的重载齿轮时误差较大的缺点,提出了一种基于全齿面整个啮合过程的真实齿面接触分析新方法.通过建立检验真实齿面的干涉判据,利用一系列连续变化的柱面去截取啮合齿面,得到一族瞬时接触线,从而可对整个啮合过程的齿面接触情况进行分析.用此法对弧形齿线圆柱齿轮进行了实例分析,分析结果表明此方法是正确可行的.与传统的 TCA 方法相比,该方法不仅能更确切地反映真实齿面的实际接触斑点,还能直观地判断是否发生齿面干涉.

**关键词:** 弧形齿线圆柱齿轮;展成法;齿面接触

**中图分类号:** TH132 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-987X(2005)07-0722-04

## Real Tooth Contact Analysis of the Cylindrical Gears with Symmetrical Arcuate Tooth Trace

Ma Zhenqun, Wang Xiaochun, Shen Bing

(School of Mechanical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

**Abstract:** The traditional tooth contact analysis (TCA) method can not exactly reflect the actual tooth contact conditions, especially for heavy duty gears with a wide width. To solve the problem, a new real tooth contact analysis (RTCA) method is presented, which is based on the whole tooth surface analyzing in the meshing process. An interference criterion identifying actual tooth surface is founded. Then a set of instantaneous contact curves are calculated via intersecting the meshing tooth surfaces by a series of varying cylindrical surfaces, so the actual contact status of meshing tooth surfaces can be analyzed. The contact tooth surface of the cylindrical gear with symmetrical arcuate tooth trace is analyzed with this method, and the results are compared with those got with the traditional TCA method. This method can exactly reflect the actual contact field of meshing tooth surfaces, and intuitively identify if there is the interference or not.

**Keywords:** arcuate tooth trace cylindrical gear; generation; tooth contact

对称弧形齿线圆柱齿轮是一种新型圆柱齿轮,具有综合强度高、运转平稳、无轴向力等特点,能够满足用户对齿轮传动的噪声、平稳性以及对其敏感性的更高要求,适合应用于高性能重载齿轮的行业中.文献[1]中提出的具有刀倾角的双面刀盘展成法,在多轴联动 CNC 机床上加工对称弧形齿线圆柱齿轮时,其主要特征之一就是可以完全控制局部轮齿接触,但如何有效地分析实际加工齿面的接触情况,则是评价这种齿轮副啮合质量的一

个关键性问题.

### 1 传统 TCA 方法的局限性

作为锥齿轮副啮合分析的强有力工具,齿面接触分析(TCA)方法在理论分析和实际生产中都得到了广泛的应用<sup>[2-4]</sup>.这种分析方法最初是针对锥齿轮齿面啮合分析而提出的,其基本理论是在给定接触点,将两齿面之间的差曲面看作一个近似的椭圆抛物面,在确定的方向上两齿面之间的距离与离开

接触点距离的平方成正比,因此在锥齿轮副啮合时,瞬时接触区是以理论接触点为中心的椭圆,如图 1 所示,其长、短轴分别为

$$l_1 = \left( \frac{8\delta}{k_1^{(21)}} \right)^{1/2}; l_2 = \left( \frac{8\delta}{k_2^{(21)}} \right)^{1/2} \quad (1)$$

式中:  $k_1^{(21)}$  和  $k_2^{(21)}$  为差曲面的主曲率;  $\delta$  为两齿面之间的距离,一般取为  $6.25 \mu\text{m}$ . 当  $\delta$  小于  $6.25 \mu\text{m}$  时,在工作过程中,由于接触点的弹性变形,所以两齿面即可相接触<sup>[5]</sup>. 但是, TCA 方法是一种理论上的近似处理方法,它假设两啮合齿面是二阶近似曲面,它们之间的差曲面也是二阶近似曲面,而实际上两齿面、差曲面均不是二阶近似曲面,因此 TCA 方法不能准确地反映齿面啮合的真实情况.

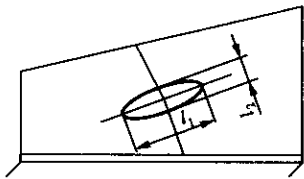
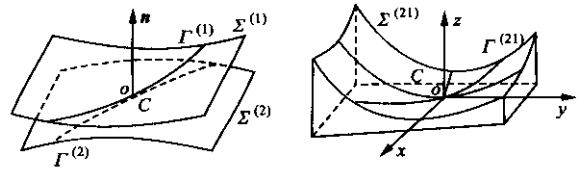


图 1 齿面的接触斑点

TCA 方法对于宽度较窄的局部接触齿轮副,还可以近似表示其接触斑点,但对于宽度较大的重载齿轮副,反映的接触情况误差太大,则不宜使用. 另一方面,由于实际加工出的点接触齿面之间的距离并不是一个严格的椭圆抛物面,其距离存在三阶及三阶以上的部分,因此在离开接触点较远的地方两齿面之间的距离有可能减少到 0,即在这些地方有可能发生干涉现象. 传统的 TCA 方法只是分析了理论啮合点的接触情况,并未考虑远离接触点的情况. 如果齿面存在三阶及三阶以上的干涉现象,齿轮副工作时将发生齿轮边缘的不正常接触,导致齿面接触区的中断和齿顶冲击,使传动变得不平稳,产生较大的冲击、振动和噪声,严重影响齿轮副的工作质量.

## 2 真实齿面的干涉判据

设小轮齿面  $r^{(1)} = r^{(1)}(u_1, v_1)$  和大轮齿面  $r^{(2)} = r^{(2)}(u_2, v_2)$  在  $C$  点啮合,则在该点它们有相同的单位法矢量,如图 2a 所示. 从图上的直观分析可见,若令大、小轮齿面上最短距离点的连线在两齿面实体之外为正,在两齿面实体之内为负,如果小轮齿面上任意一点到大轮齿面的有向最短距离  $d$  均满足  $d \geq 0$ ,则两齿面不发生干涉;如果  $d < 0$ ,则在这些点上发生干涉.



(a) 齿面啮合

(b) 差曲面

$\Sigma^{(1)}$ : 小轮啮合齿面;  $\Sigma^{(2)}$ : 大轮啮合齿面;  $n$ : 单位法矢量;  
 $\Gamma^{(1)}$ : 与小轮齿面的截交线;  $\Gamma^{(2)}$ : 与大轮齿面的截交线;  
 $\Sigma^{(21)}$ : 差曲面;  $\Gamma^{(21)}$ : 极小值线;  $C$ : 参考点

图 2 齿面的干涉判据

下面,关键的问题是如何获得小轮齿面与大轮齿面之间的有向最短距离,可以利用一系列连续变化的截面去截  $\Sigma^{(1)}$  和  $\Sigma^{(2)}$ ,若在任意截面内  $\Sigma^{(1)}$  和  $\Sigma^{(2)}$  与此截面的交线除  $C$  外均不相交,则两齿面不干涉. 为了简单形象地描述  $\Sigma^{(1)}$  和  $\Sigma^{(2)}$  之间的有向最短距离,引进差曲面的概念,以  $C$  为原点建立坐标系  $C-xyz$ ,将齿面投影在  $xCy$  平面上,以  $\Sigma^{(1)}$  和  $\Sigma^{(2)}$  之间的有向最短距离为纵坐标,如图 2b 所示. 当截面连续变化时,就可得到所谓的差曲面,即  $z = z(x, y)$ ,它形象地反映出  $\Sigma^{(1)}$ 、 $\Sigma^{(2)}$  在  $C$  点接触时整个齿面的接近程度. 根据上述有向最短距离的定义,若差曲面所有点均位于  $xy$  平面上方,则  $\Sigma^{(1)}$ 、 $\Sigma^{(2)}$  不会发生干涉;反之若差曲面的某些点位于  $xy$  曲面下方,则与  $xy$  曲面下方对应点的齿面区域将发生干涉. 本文采用一系列通过  $C$  点、以法矢量为轴线的不同半径的同心柱面作截面,截取相啮合的  $\Sigma^{(1)}$ 、 $\Sigma^{(2)}$ ,建立差曲面,更能准确地反映  $\Sigma^{(1)}$ 、 $\Sigma^{(2)}$  的接近程度.

从数学的角度分析,由于  $\Sigma^{(1)}$ 、 $\Sigma^{(2)}$  不是二阶曲面,因此差曲面也不是二阶曲面,但却是光滑连续的曲面. 在差曲面上,给定  $x$  时,总存在着一个  $y$  使  $z = z(x, y)$  取值最小,由于差曲面是光滑连续的,因此当  $x$  连续变化时, $y$  连续变化,则所有满足以上条件的点构成一条线 ( $\Gamma^{(21)}$ ),其方程可表示为

$$z_{\Gamma}(x) = \min z(x, y)$$

它反映了两齿面在  $C$  点啮合时最接近的程度.

实际上,在用不同半径的同心柱面截取时,每个圆柱面上位于 2 条截线之间的母线长度在一周内有两个最小值,将所有最小值的点连接起来,就可以得到最短距离线,即  $\Gamma^{(21)}$ . 在  $\Sigma^{(1)}$ 、 $\Sigma^{(2)}$  上对应于  $\Gamma^{(21)}$ ,可得到 2 条实际齿面的接触线(见图 2 中的  $\Gamma^{(1)}$  和  $\Gamma^{(2)}$ ). 在一般情况下, $\Gamma^{(1)}$ 、 $\Gamma^{(2)}$  和  $\Gamma^{(21)}$  都是空间曲线,若  $\Gamma^{(21)}$  与  $xy$  平面相交,则说明有干涉发生.

### 3 真实齿面的接触分析方法

根据以上分析,为了更确切地分析局部接触齿副啮合的实际接触情况,并检验是否存在齿面的某些高阶干涉现象,提出了一种真实齿面接触分析(RTCA)方法,它是对传统TCA方法的改进和完善,保留了传统TCA方法的分析内容,并且增加了干涉检验部分,输出结果也多了一个检验图,能够直观地反映 $\Sigma^{(1)}$ 、 $\Sigma^{(2)}$ 在接触过程中最接近的程度,可以很方便地判断是否发生干涉,因此能够更确切地反映真实齿面的实际接触情况。

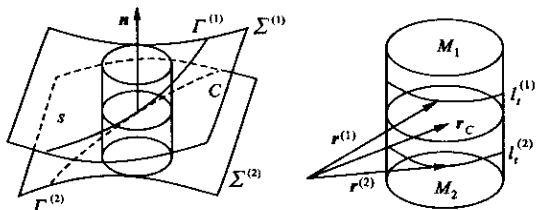
#### 3.1 RTCA方法的基本思想

对于实际加工出的理论齿面的实际接触情况,首先齿面的干涉检验应在全齿面整个啮合过程中进行,不是只在参考点处进行,因为在参考点不发生干涉并不能保证在其他点不发生干涉。其次,不能以二阶近似曲面代替真实的差曲面,因为这种近似处理已经人为地排除了某些干涉情况。

RTCA方法的基本思想是根据上述真实齿面的干涉判据,在 $\Sigma^{(1)}$ 、 $\Sigma^{(2)}$ 的每个接触点上计算出最小距离线,并认为最小距离小于 $6.25 \mu\text{m}$ 时即为 $\Sigma^{(1)}$ 、 $\Sigma^{(2)}$ 相接触,而此时小于 $6.25 \mu\text{m}$ 的最小距离线就是该点真实的瞬时接触线。在所有的接触点(接触迹线)上由小于 $6.25 \mu\text{m}$ 的最小距离线构成 $\Sigma^{(1)}$ 、 $\Sigma^{(2)}$ 的接触斑点,将其用图形表示能够更真实地反映啮合过程中的接触情况。在RTCA方法中,还可将由最小距离线构成的差曲面用立体图形输出,这样可以更直观地看出在整个啮合过程中是否发生干涉。

#### 3.2 最小距离线的获取

最小距离线的获取是RTCA方法中的关键问题,如图3所示,C的位置矢量可以用传统TCA方法求得。设过点C的法矢量为轴线,柱面截面的半



(a) 柱面截取原理

(b) 最小值线求解

$r$ : C点的位置矢量;  $r^{(1)}$ 、 $r^{(2)}$ : 小轮、大轮齿面;  $l_t^{(1)}$ 、 $l_t^{(2)}$ : 柱面

与小、大轮齿面的交线;  $\Sigma^{(1)}$ 、 $\Sigma^{(2)}$ : 小轮和大轮的啮合

齿面;  $\Gamma^{(1)}$ 、 $\Gamma^{(2)}$ : 与小轮、大轮齿面的截交线;

$M_1$ 、 $M_2$ : 截交线之间距离最小的点

图3 最小值线的获取

径为 $s$ ,截取相互啮合的两齿面,在两齿面上分别得到2条截交线,故

$$\left. \begin{aligned} |r^{(1)}(u_1, v_1) - r_C| &= (s^2 + d_1^2)^{1/2} \\ |r^{(2)}(u_2, v_2) - r_C| &= (s^2 + d_2^2)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中; $d_1$ 、 $d_2$ 分别表示切断面到 $\Sigma^{(1)}$ 、 $\Sigma^{(2)}$ 的交点距离,可由下式求出

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= n \cdot r^{(1)}(u_1, v_1) \\ d_2 &= n \cdot r^{(2)}(u_2, v_2) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

则两齿面的交点距离为

$$d = n \cdot (r^{(2)}(u_2, v_2) - r^{(1)}(u_1, v_1)) \quad (4)$$

比较各交点之间的距离,即可求出以C点为圆心、不同半径处的最短距离。在实际求解过程中,由于 $r^{(1)}(u_1, v_1)$ 和 $r^{(2)}(u_2, v_2)$ 的表达式很复杂,并不能显式给出,因此需用文献[5]中的方法进行参数化后,再用迭代法搜索求解。

在C点的两侧,各有一个局部最小值的位置,分别位于接触点两侧,当 $s$ 从0到最大值连续变化时,可用跟踪法求得 $\Gamma^{(1)}$ 、 $\Gamma^{(2)}$ 和 $\Gamma^{(21)}$ 曲线,它们以C点为中心向两边伸展,求解过程中应注意 $(u_1, v_1)$ 和 $(u_2, v_2)$ 的取值范围。

#### 3.3 整个啮合过程的接触分析

在接触迹线上选取一系列点,在每个点上计算最小值线,这样分析的区域可覆盖齿面大多数区域,如图4中所示的迹线接触区部分。由于图4中的边缘接触区一般已进入多齿啮合区且进行了修缘,因此发生干涉的可能性不大。如果在边缘接触区发生干涉,则有可能使得齿轮运行不平稳,甚至严重降低啮合质量,因此对边缘接触区部分也有必要进行接触分析,以提高RTCA方法的可靠性。在边缘接触区域可适当延长接触迹线,在啮合面有效工作区内进行接触分析(此时接触点已不在接触迹线上),这样可获得整个啮合过程的最小值面,而且得到的真实齿面接触分析图能够更真实地反映齿面的接触情况。

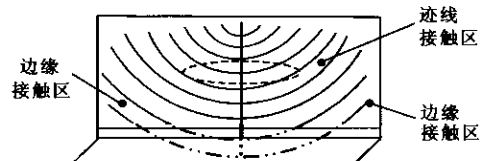


图4 整个啮合过程的接触分析

### 4 实例分析

在分析对称弧形齿线圆柱齿轮的实例中,齿轮

副的主要参数如表 1 所示。

表 1 RTCA 实例的齿轮副参数

参数名称	小轮	大轮
齿数/个	17	33
分度圆直径/mm	68	132
模数/mm	4	4
中心距/mm	100	100
齿面宽/mm	65	65
最大螺旋角/(°)	25	25
刀盘名义直径/mm	152.4	152.4
刀倾角/(°)	5.85	5.85
压力角/(°)	20	20

#### 4.1 齿面接触分析过程

按照上述的 RTCA 方法的分析原理,首先求取齿面啮合过程中的接触迹线,不同的点接触齿轮副求取方法有所不同。根据对称弧形齿线圆柱齿轮的加工方法和结构特点,其接触迹线是一条垂直于齿轮轴线且位于中心截面的曲线。根据文献[1]介绍的齿面啮合方程,以节点为初始点,沿着接触迹线,以啮合点的法线为轴,用一系列不同半径的同心圆柱面截取两啮合齿面,用迭代法搜索求解,求得的最短距离如图 5a 所示。若有向最短距离线组成的曲面均位于平面上方,则  $\Sigma^{(1)}$ 、 $\Sigma^{(2)}$  不会发生干涉。将所有接触点上小于  $6.25 \mu\text{m}$  的最小距离线用图 5b 表示。

传动误差曲线的确定与传统的 TCA 方法相同,先求出各接触点的大小齿轮转角,再与定传动比时的理论转角进行比较,求出大轮的转角误差,便可得出传动误差曲线图,见图 5c。

#### 4.2 RTCA 与 TCA 方法的比较

为了便于比较,用传统的 TCA 方法[4]对相同的对称弧形齿线圆柱齿轮进行分析,其小轮凹面的分析结果如图 6 所示。可以看出,RTCA 方法的分析结果多了一个干涉检验图,它是齿面啮合最小值面的拓扑图,可对全齿面在整个啮合过程中进行直观的干涉检验,而传统的 TCA 方法则无此功能。

从图 5b 中可以看出,真实齿面的接触情况并不是如图 6a 中 TCA 方法所分析的那样,瞬时接触线并非是由扁长椭圆简化的一条直线,而是由弯曲椭圆简化的一条曲线,这更接近于齿轮啮合的实际接触情况[6],也证明了 RTCA 方法能更确切地反映真实齿面的接触情况。图 6b 与图 5c 相比则无多大区别,其目的只是用以描述运动传递的特征。

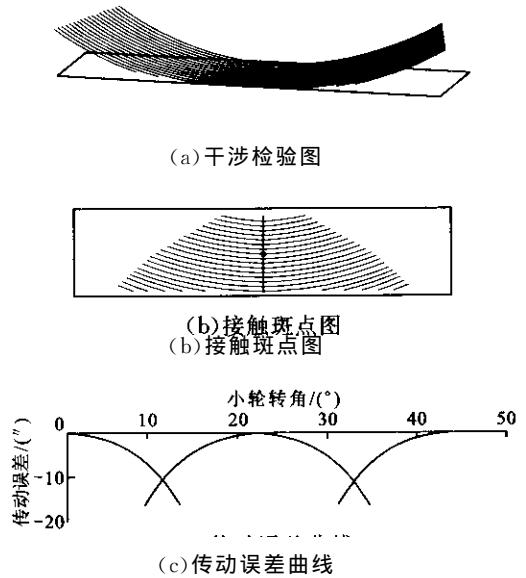


图 5 RTCA 方法的分析结果

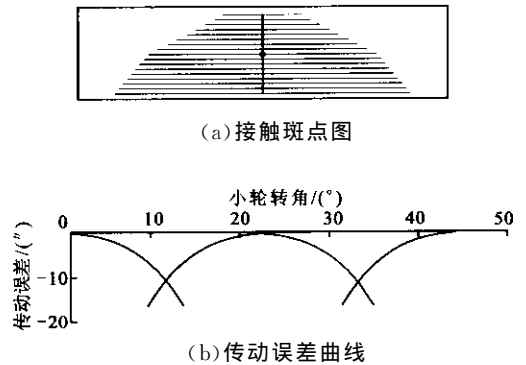


图 6 TCA 方法的分析结果

## 5 结 论

本文提出的 RTCA 方法是对传统 TCA 方法的改进和完善,其理论基础有别于传统的 TCA 方法。通过建立检验真实齿面的干涉判据,利用一系列连续变化的柱面去截取啮合齿面,得到一族瞬时接触线,从而可对全齿面在整个啮合过程中的齿面接触情况进行分析,因此能更真实地反映齿轮副的啮合情况,也为分析齿轮接触强度和弯曲强度的应力分布提供了更准确的依据。从图 5 的分析结果中,还可使操作者能够直观地判断出齿轮副在整个啮合过程中是否发生了特殊的干涉现象。

本文采用 RTCA 方法对对称弧形齿线圆柱齿轮进行了齿面啮合分析,并与传统 TCA 方法的分析结果进行了比较,证明 RTCA 方法能够克服传统 TCA 方法的不足和局限性,可使点接触齿轮的接触分析更具真实性,因而具有普遍意义。

(下转第 761 页)

