

# 一种基于质点动力学原理的快速自适应建模算法

王 腾<sup>1</sup>, 闫桂荣<sup>1</sup>, 张新武<sup>2</sup>

(1. 西安交通大学建筑工程与力学学院, 710049, 西安; 2. 中国工程物理研究院, 621900, 绵阳)

**摘要:** 针对自适应逆控制技术中最小均方(LMS)算法建模速度慢的缺点, 基于重力场中超曲面上质点的动力学原理, 提出了一种快速自适应建模算法. 该算法的特点是将滤波器权系数的迭代求解过程类比为重力场中超曲面上质点的运动, 在质点的自由运动微分方程中加入比例阻尼项, 使各模态的阻尼系数均接近于临界阻尼, 从而使权系数以较快速度收敛, 并利用质点微分方程中的非线性项实现变步长迭代, 明显提高了自适应维纳滤波器的权系数收敛速度. 仿真试验结果证明该算法优于 LMS 算法. 该算法运算代价小, 收敛速度快, 可替代 LMS 算法用作自适应逆控制的建模工具.

**关键词:** 最小均方算法; 自适应滤波器; 快速算法; 多自由度系统动力学; 变步长

**中图分类号:** TP273 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-987X(2005)01-0092-04

## Novel Fast Adaptive Modeling Algorithm Based on Particle Dynamics

Wang Teng<sup>1</sup>, Yan Guirong<sup>1</sup>, Zhang Xinwu<sup>2</sup>

(1. School of Architectural Engineering and Mechanics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;

2. China Academy of Engineering Physics, Mianyang 621900, China)

**Abstract:** A new adaptive modeling algorithm, PD MDF (proportionally damped multidegree of freedom system), is proposed to build the model of a plant. It is derived by assimilating the process of iteration for the optimal weight coefficients to a particle movement on the hypersurface, the mean square error surface geometry in the space of filter parameters located in the gravitational field. The PD MDF algorithm is developed from the particle differential equation by introducing a proportional damping force and making all damping factors approach the critical damping. The nonlinear term in the particle differential equation is considered as a variable step size in the PD MDF algorithm. The simulation results show a faster convergence rate of the algorithm than that of least mean square algorithm at the same level of misadjustment. This new algorithm could be expected to apply to adaptive inverse control.

**Keywords:** least mean square algorithm; adaptive filter; fast algorithm; dynamics of multidegree of freedom system; variable step size

维纳自适应滤波器广泛用于自适应逆控制<sup>[1]</sup>、信号处理<sup>[2]</sup>、机械故障诊断<sup>[3]</sup>等的建模与辨识. 最小均方(LMS)算法以其简单、计算代价小、易于实施等特点而被用作常规的建模算法, 但其缺点是速度慢且收敛速度强烈依赖于输入信号的相关矩阵特征值散度, 因而更适用于白噪声信号建模<sup>[1]</sup>. 实际情况下有时建模信号不能受控或在原信号中加入白噪声

扰动对系统工作有影响, 此时采用白噪声信号建模存在一定困难<sup>[1]</sup>. 因此, 设法提高 LMS 算法在相关输入信号下的建模速度和精度就是很有实际意义的工作, 很多学者在此方面进行了研究<sup>[4-9]</sup>. 受文献[8, 9]的启发, 本文提出了一种新的自适应滤波, 称之为 PD MDF (Proportionally Damped Multidegree of Freedom system) 算法. 该算法的基本思想是把维纳

自适应滤波器迭代过程类比为重力场中超曲面上质点的有阻尼运动,并利用质点运动微分方程中的非线性项实现变步长迭代,从而使权系数以较快的速度收敛。

## 1 基于比例阻尼的 PD MDF 算法

如果给一组  $N$  个输入信号加权,形成一个输出信号,第  $k$  个输入信号向量为

$$\mathbf{X}_k^T = [x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{ik}, \dots, x_{Nk}]$$

$k$  时刻的权系数向量为

$$\mathbf{W}_k^T = [\omega_{1k}, \omega_{2k}, \dots, \omega_{Nk}]$$

用  $d_k$  表示期望信号,  $\mathbf{W}^*$  表示最优权向量,那么均方误差(MSE)是

$$\begin{aligned} M_{\text{MSE}} &= E[(d_k - \mathbf{W}_k^T \mathbf{X}_k)^2] = E[e(k)^2] = \\ &E[e_0(k)^2 + \mathbf{V}_k^T \mathbf{X}_k \mathbf{X}_k^T \mathbf{V}_k] = \mathbf{V}^T \mathbf{R} \mathbf{V} + E[e_0(k)^2] \end{aligned} \quad (1)$$

式中:  $\mathbf{V}_k = \mathbf{W}_k - \mathbf{W}^*$ ;  $\mathbf{R}$  是输入相关矩阵;  $E[\cdot]$  表示数学期望运算;  $e_0(k)$  是最优误差信号。

由式(1)可看出,均方误差是权系数的二次函数,是一个碗状的超曲面。迭代算法就是连续不断地调节权系数以寻找碗底。MSE 函数是一个  $N$  维二次函数,是  $N+1$  维空间的一个超曲面。根据直观想象,如果把该超曲面置于重力场中,受该曲面约束的质点在重力的作用下将会运动到碗底,即最优点,这个过程与用迭代算法求最优点相似,因而可以从研究超曲面上质点的运动来研究维纳自适应滤波器的迭代算法。

### 1.1 重力场中数据曲面上质点的自由运动

自适应维纳滤波器求解可转化为如下问题:在重力场中光滑超曲面  $S = \{y \in R^1, \mathbf{V} \in R^N \mid y = \mathbf{V}^T \mathbf{R} \mathbf{V}\}$  上的任意位置,有一质量为  $m$  的质点从静止开始运动,不计阻力,求质点的运动微分方程。质点的动能和势能分别为

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{y}^2 + \dot{\mathbf{V}}^T \dot{\mathbf{V}}); \quad U = mgy$$

式中:  $g$  为重力加速度。根据机械能守恒定律<sup>[10]</sup>,可解得质点运动微分方程为

$$y\ddot{y} + \dot{\mathbf{V}}^T \ddot{\mathbf{V}} + g\dot{y} = 0$$

从式(1)可导出  $\dot{y} = 2\dot{\mathbf{V}}^T \mathbf{R} \mathbf{V}$ ,代入上式并将方程两边前乘  $(\dot{\mathbf{V}}\dot{\mathbf{V}}^T)^{-1}\dot{\mathbf{V}}$ ,得

$$\dot{\mathbf{V}} + 2(g + \dot{y})\mathbf{R}\mathbf{V} = 0 \quad (2)$$

显然,式(2)为非线性振动方程。令  $\mu = g + \dot{y}$ ,从而有

$$\dot{\mathbf{V}} + 2\mu\mathbf{R}\mathbf{V} = 0 \quad (3)$$

由式(3)可看出,自适应维纳滤波器的求解过程可转化为多自由度系统的振动方程,该方程的刚度矩阵与输入信号相关矩阵成比例。该多自由度系统的模态固有频率与输入信号相关矩阵的特征值也有相应的关系。

### 1.2 引入阻尼

只有引入阻尼,才能使质点的运动衰减。在一个采样间隔内,方程(3)可近似认为是线性系统。根据线性系统振动理论,当阻尼为临界阻尼时,振幅衰减最快。采用振型叠加法<sup>[10]</sup>对式(3)进行解耦,使其变为单自由度运动的叠加,第  $i$  阶振动方程为

$$\ddot{V}_i' + 2\mu\lambda_i V_i' = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

式中:  $\lambda_i$  为输入相关矩阵的第  $i$  阶特征值;  $V_i'$  为向量  $\mathbf{V}$  旋转后的向量  $\mathbf{V}'$  的第  $i$  个分量。第  $i$  阶振动的固有频率为  $\omega_i = (2\mu\lambda_i)^{1/2}$ 。为使其运动衰减,需在质点运动微分方程中引入阻尼系数为  $\xi_i$  的阻尼力,有

$$\ddot{V}_i' + 2\xi_i\omega_i\dot{V}_i' + \omega_i^2 V_i' = 0 \quad (5)$$

根据动力学的理论<sup>[10]</sup>,在多自由度系统中可使振动微分方程解耦的阻尼矩阵具有如下的形式

$$\mathbf{C} = \mathbf{M} \sum_{i=0}^{n-1} a_i (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K})^i \quad (6)$$

当  $n=2$  时,有  $\mathbf{C} = a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{K}$ ,其中  $\mathbf{M}$  为质量矩阵,  $\mathbf{K}$  为刚度矩阵,  $\mathbf{C}$  为阻尼矩阵,  $a_i$  为常数。对于式(3),由于其质量矩阵和刚度矩阵分别为  $\mathbf{M} = \mathbf{I}$  和  $\mathbf{K} = 2\mu\mathbf{R}$ ,所以加入阻尼后有如下结果

$$\ddot{\mathbf{V}} + (a_0 + a_1 \mathbf{R})\dot{\mathbf{V}} + 2\mu\mathbf{R}\mathbf{V} = 0 \quad (7)$$

其第  $i$  阶模态的阻尼系数为

$$\xi_i = \frac{a_0}{2} (2\mu\lambda_i)^{-1/2} + \frac{a_1}{2} (2\mu\lambda_i)^{1/2}$$

对于式(7),为便于讨论,令

$$\begin{aligned} \xi_i &= r_1 (2\mu\lambda_i)^{1/2} + r_2 (2\mu\lambda_i)^{-1/2} \\ \forall i &= 1, 2, \dots, N; \quad r > 0 \end{aligned} \quad (8)$$

式中:  $r$  为当量阻尼系数,  $r_1$ 、 $r_2$  为常数。

由振动理论知,各阶模态接近临界阻尼时收敛速度最快,故采用以下简便方法使各阶模态阻尼系数接近临界阻尼。令

$$\lambda_i = \lambda_{\max} \text{ 时 } \quad r_1 (2\mu\lambda_{\max})^{1/2} + r_2 (2\mu\lambda_{\max})^{-1/2} = 1$$

$$\lambda_i = \lambda_{\min} \text{ 时 } \quad r_1 (2\mu\lambda_{\min})^{1/2} + r_2 (2\mu\lambda_{\min})^{-1/2} = 1$$

联立求解以上 2 式,得

$$r_1 = (2\mu)^{-1/2} (\lambda_{\max}^{1/2} + \lambda_{\min}^{1/2})^{-1}$$

$$r_2 = (2\mu\lambda_{\max}\lambda_{\min})^{1/2} (\lambda_{\max}^{1/2} + \lambda_{\min}^{1/2})^{-1}$$

上式计算较繁琐,当  $\lambda_{\min} \ll \lambda_{\max}$  时,可近似简化为

$$r_1 = (2\mu\lambda_{\max})^{-1/2}; \quad r_2 = (2\mu\lambda_{\min})^{1/2}$$

从而第  $i$  阶模态的阻尼系数为

$$\xi_i = r \left( \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_{\max}} \right)^{1/2} + \left( \frac{\lambda_{\min}}{\lambda_i} \right)^{1/2} \right) \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \quad (9)$$

下面由式(9)导出迭代算法。

### 1.3 PD MDF 算法

将式(9)代入式(5)并进行逆解耦,有

$$\ddot{\mathbf{V}} + 2r(2\mu)^{1/2} (\mathbf{R}\lambda_{\max}^{-1/2} + \lambda_{\min}^{1/2}) \dot{\mathbf{V}} + 2\mu \mathbf{R}\mathbf{V} = 0$$

采用中央差分格式进行离散化,即令

$$\dot{\mathbf{V}} = \frac{1}{2}(\mathbf{W}_{k+1} - \mathbf{W}_{k-1}); \quad \ddot{\mathbf{V}} = \mathbf{W}_{k+1} - 2\mathbf{W}_k + \mathbf{W}_{k-1}$$

采用与 LMS 算法相同的梯度估计方法,有

$$\mathbf{R}\mathbf{V} \approx -e(k)\mathbf{X}_k; \quad \mathbf{R}\dot{\mathbf{V}} \approx e(k-1)\mathbf{X}_{k-1} - e(k)\mathbf{X}_k$$

采用有限时间平均二阶差分  $\hat{y}(k)$  估计真实的  $\dot{y}(k)$

$$\dot{y}(k) \approx \hat{y}(k) = \frac{1}{k-N} \sum_{i=k-N+1}^k (e^2(i) - 2e^2(i-1) + e^2(i-2)) \quad (10)$$

并进行归一化处理。为保证  $\mu > 0$ , 修正  $\mu$  的定义为

$$\mu = g + p \frac{|\hat{y}(k)|}{|\hat{y}(k)|_{\max}} \quad (11)$$

其中  $p > 0, g \geq 0$ , 则可导出如下的权系数迭代计算公式

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{k+1} = & \frac{2}{1+r(2\mu\lambda_{\min})^{1/2}} \mathbf{W}_k - \frac{1-r(2\mu\lambda_{\min})^{1/2}}{1+r(2\mu\lambda_{\min})^{1/2}} \mathbf{W}_{k-1} + \\ & \frac{2r(2\mu/\lambda_{\max})^{1/2}}{1+r(2\mu\lambda_{\min})^{1/2}} (e(k)\mathbf{X}_k - e(k-1)\mathbf{X}_{k-1}) + \\ & \frac{2\mu}{1+r(2\mu\lambda_{\min})^{1/2}} e(k)\mathbf{X}_k \end{aligned} \quad (12)$$

式(10)~(12)一起构成了 PD MDF 算法。

### 1.4 参数选择和估计

迭代式(10)~(12)中需要确定的参数有当量阻尼系数  $r$ 、相关矩阵的最大特征值  $\lambda_{\max}$ 、最小特征值  $\lambda_{\min}$ 、固定步长  $g$  及变步长调整因子  $p$ 。权系数初值可任意选择,为方便起见,可选 0 作为初值。

1.4.1  $r$  的选择 单自由度系统在临界阻尼时收敛速度最快,超过临界阻尼则易导致收敛停滞<sup>[10]</sup>, 因此应使各阶模态的阻尼系数  $\xi_i \leq 1$ 。由式(9)得

$$r = \alpha \left( 1 + \frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}} \right)^{-1/2} \leq \left( 1 + \frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}} \right)^{-1/2}$$

式中:  $0 < \alpha < 1$ 。

1.4.2  $\lambda_{\max}$  和  $\lambda_{\min}$  的估计 根据文献[11]的结论,  $N$  阶对称矩阵和对称正定矩阵的特征值可按以下各式估计

$$\text{万方数据} \quad \frac{\text{tr}\mathbf{R}}{N} - (N-1)^{1/2} S$$

$$\lambda_{\max} = \frac{\text{tr}\mathbf{R}}{N} + (N-1)^{1/2} S$$

式中:  $S = \left( \frac{1}{N} \left( \text{tr}\mathbf{R}^2 - \frac{(\text{tr}\mathbf{R})^2}{N} \right) \right)^{1/2}$ , 其中  $\text{tr}\mathbf{R}^2 =$

$$\sum_{i=1, j=1}^N (\mathbf{R}_{i,j})^2 = \sum_{i=1, j=1}^N (E(x_{ik}x_{jk}))^2.$$

1.4.3 步长参数  $g$  和  $p$  仿真试验结果表明,  $g$  值大则收敛速度快,但导致失调误差(迭代收敛后的均方误差)增加,反之,  $g$  值小则收敛速度减慢,但失调误差减小。因此,对失调误差要求高时,可取  $g=0$ , 对收敛速度要求高时,一般取  $g>0$ 。参照 LMS 算法,按如下范围选取  $p$  值

$$0 \leq p \leq 1/\lambda_{\max}$$

## 2 仿真试验及讨论

采用归一化的均方误差

$$\overline{M}_{\text{MSE}} = 10 \lg [(\mathbf{W} - \mathbf{W}^*)^T \mathbf{R} (\mathbf{W} - \mathbf{W}^*) / (\mathbf{W}^{*T} \mathbf{R} \mathbf{W}^*)]$$

作为性能评价指标,选择自适应滤波器长度等于未知系统滤波器长度,对下面的具有 5 个权系数的 FIR 系统进行识别

$$\mathbf{W}^* = [-0.5, 1, 3, 2.5, -2.5]^T$$

### 2.1 白噪声信号建模

图 1 的建模信号是方差为 1 的高斯白噪声,对象噪声是方差为 0.36 的高斯白噪声,迭代参数为:  $g=0, 0.006, 0.01$ ;  $p=4 \times 10^{-3}$ ;  $\alpha=0.5$ ;  $\mu_{\text{LMS}}=0.008$ 。计算 2 000 次循环后进行集合平均。由图 1 可看出,随着步长  $g$  的增大,PD MDF 算法的收敛速度愈来愈快,其收敛速度快于 LMS 算法,但其失调误差均高于 LMS 算法。当  $g=0$  时,PD MDF 算法的失调误差最小,与 LMS 算法的失调误差相同。

图 2 的建模信号是方差为 1 的高斯白噪声,对象噪声是方差分别为 0.01、0.04、0.16、0.36 和 0.64 的高斯白噪声。迭代参数为  $g=0, p=4 \times 10^{-3}, \alpha=0.5, \mu_{\text{LMS}}=0.008$ 。计算 1 000 次循环后进行集合平均。由图 2 可看出,随着对象噪声方差的增加,PD MDF 算法和 LMS 算法的失调误差都增大,但 PD MDF 算法的收敛速度总是比 LMS 算法的快,并且与 LMS 算法具有相同的失调误差。

### 2.2 相关信号建模

建模信号由幅值为 1 的余弦信号和方差为 0.25 的高斯白噪声组成,对象噪声是方差为 0.36 的高斯白噪声。PD MDF 算法和 LMS 算法的迭代参数与图 2 的相同,计算 1 000 次循环后进行集合平均。由图 3 可看出,在具有同等失调误差的条件下,

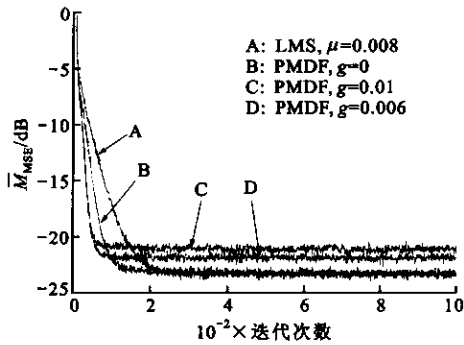


图1 用高斯白噪声信号建模时参数  $g$  对 PDMDF 算法失调误差的影响

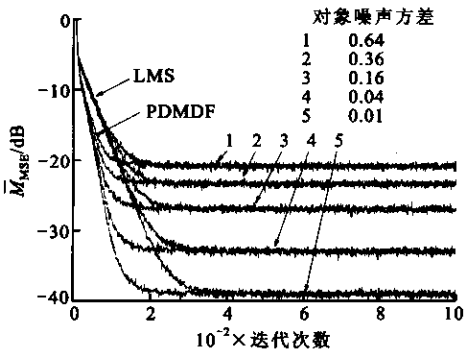


图2 用高斯白噪声信号建模时对象噪声方差对 PDMDF 和 LMS 算法失调误差的影响

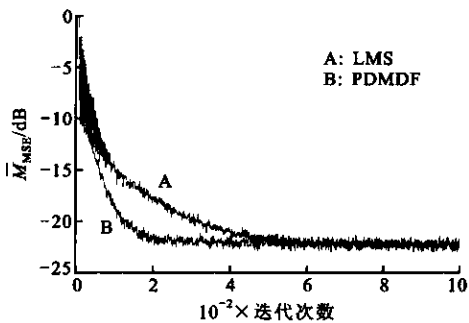


图3 相关输入信号建模时 PDMDF 和 LMS 算法的均方误差曲线

PDMDF 算法明显比 LMS 算法收敛快,这说明采用相关输入信号建模时,PDMDF 算法比 LMS 算法有明显的收敛速度优势。

### 3 结 论

本文基于超曲面上质点动力学的算法原理,通过在质点运动微分方程中加入比列阻尼项,利用微

分方程中的非线性项实现变步长迭代,从而构成了 PDMDF 算法。仿真试验结果表明,不论建模信号是否含有相关分量,PDMDF 算法的收敛速度都优于 LMS 算法,其失调误差与 LMS 算法相同。PDMDF 算法不需矩阵求逆,其运算代价略大于 LMS 算法,适用于线性系统建模。本文提出的确定参数的方法并不一定是最优的,仍需进一步探索固定步长和变动步长的协调关系,在不增加失调误差的前提下,使得 PDMDF 算法的收敛速度优势得到最大发挥,并使之应用于自适应逆控制。

### 参考文献:

- [1] Widrow B, Walach E. 自适应逆控制[M]. 刘树棠, 韩崇昭, 译. 西安: 西安交通大学出版社, 2000.
- [2] 杨位钦, 顾 岚. 时间序列分析与建模[M]. 北京: 北京工业学院出版社, 1986.
- [3] 何正嘉, 屈梁生. 机械故障诊断学[M]. 北京: 机械工业出版社, 1986.
- [4] Wang Yue, Zhang Chun, Wang Zhihua. A new variable step size LMS algorithm with application to active noise control [A]. Intl Conf on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Hong Kong, 2003.
- [5] Mathews V J, Xie Zhenhua. A stochastic gradient adaptive step size [J]. IEEE Trans Signal Process, 1993, 41(6): 2 075-2 087.
- [6] Hosur S, Tewfik A H. Wave transform domain LMS algorithm [A]. Intl Conf on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Minneapolis, USA, 1993.
- [7] Haykin S. Adaptive filter theory [M]. 2nd ed. Englewood Cliffs, USA: Prentice-Hall, 1991.
- [8] Haddad T F, Khasawneh M A. A fast robust LMS algorithm utilizing the dynamics of a damped pendulum [J]. Journal of the Franklin Institute, 1998, 335B (3): 563-577.
- [9] Haddad T F, Khasawneh M A. A new forced LMS-based adaptive algorithm utilizing the principle of potential energy [J]. Journal of the Franklin Institute, 2000, 337(5): 515-542.
- [10] 倪振华. 振动力学[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1989.
- [11] 邓 群. 矩阵特征值的新估计[J]. 中国矿业大学学报, 1996, 25(2): 117-118.

(编辑 葛赵青)