

方腔内竖直板振荡的自然对流换热数值研究

张晓晖, 杨 茉, 余 敏, 卢 玫, 徐之平, 章立新

(上海理工大学动力工程学院, 200093, 上海)

摘要: 以空调工程热环境控制和冷冻冷藏设备为应用背景, 采用非稳态数学模型, 通过数值模拟研究了具有对称结构的封闭方腔内竖直板自然对流换热中的非线性现象. 数值结果表明: 在所考虑的 Ra 参数范围内, 数值解出现了分岔, 流动和换热随 Ra 的增大从稳态转变为非稳态; 在 Ra 为 10^4 时采用 2 种不同的初始条件得到了相同的稳态解; 当 Ra 为 5×10^4 时, 采用 2 种不同的初始条件获得了 2 种不同的解, 其中一个是稳态解, 另一个是振荡解. 数值结果揭示了所研究问题中的非线性特点.

关键词: 自然对流; 分岔; 数值模拟

中图分类号: TK124 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253 - 987X(2004)11 - 1132 - 04

Numerical Study on Oscillatory Natural Convection in Enclosure with Vertical Isothermal Plate

Zhang Xiaohui, Yang Mo, Yu Min, Lu Mei, Xu Zhiping, Zhang Lixin

(College of Power Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The nonlinear characteristics were investigated by numerical simulations for the oscillatory natural convection in an enclosure with a vertical isothermal plate. An unsteady mathematical model for the problem was solved using SIMPLE algorithm with a QUICK scheme. It is shown that the bifurcation of the numerical solutions for this flow and heat transfer occurs in a range of Rayleigh number Ra considered, and the flow and heat transfer change from a steady state to an unsteady with the increase of Ra . Further, the numerical solution obtained is unique and steady using two different initial conditions at $Ra = 10^4$, while two different numerical results can be obtained using the two different initial conditions at $Ra = 5 \times 10^4$, one of which is a steady solution and the other is an oscillatory solution.

Keywords: natural convection; bifurcation; numerical simulation

具有对称结构的封闭正方形腔内竖直板的自然对流换热问题, 是从空调工程热环境的控制及冷冻冷藏设备内的流动和换热等工程问题中抽象出来的理论模型. 本文所主要关注的是揭示这种流动和换热模型中由于系统稳定性问题而存在的数值解的振荡和分岔这种非线性现象. 关于对流换热中的非线性现象及其稳定性的研究已有研究成果发表: 文献[1, 2]分别实验研究了水平管和竖直板的对流换热中的非线性和稳定性问题; 文献[3, 4]分别采用数值

方法预测出了低 Prandtl 数流体自然对流换热和绕流管束强制对流换热中的分岔和振荡; 文献[5~7]分别用实验或数值方法研究了混合对流换热中的分岔和稳定性问题; 文献[8]探讨了 2 个同轴圆盘间硝酸钠溶液的振荡的 Maragoni 对流. 对于封闭腔内竖直板自然对流换热中的非线性现象未见有研究结果公开报道. 以往对这种方腔内自然对流流动和换热的研究通常都假定问题与时间无关而采用稳态的数学模型, 但由于问题是非线性的, 其中的流动与换热

在某些参数区间存在振荡解,因此与时间相关.本文采用非稳态的数学模型,通过数值实验,揭示了这种具有对称结构的封闭正方形腔内竖直板自然对流换热中的振荡和分岔等非线性现象.

1 问题的描述和数值方法

如图 1 所示,正方形腔的边长为 L ,方腔内竖直板的高、宽分别为 H 和 W . 竖直板以水平方向放置在方腔的中心位置,竖直方向距方腔的下表面的距离为 b . 问题的几何结构在水平方向上关于中心点是对称的,尺寸比例 $L/H/W/b=80/15/4/5$. 方腔的上下壁面绝热,左右壁面保持相同的恒定温度 T_c , 竖直板温度 T_h 为均匀恒定, $T_h > T_c$. 假设方腔内流动和换热为二维、层流、Boussinesq 流体,其向

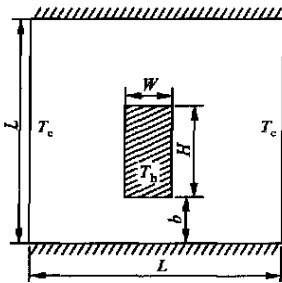


图 1 具有对称结构的正方形腔内竖直板的自然对流换热

量形式的无量纲控制微分方程组为

$$\frac{5U}{5F} + (U \cdot \alpha) U = -\alpha P + \frac{Pr}{(RaPr)^{1/2}} \alpha^2 U + Ti \tag{1}$$

$$\frac{5T}{5F} + U \cdot \alpha T = \frac{K}{(RaPr)^{1/2}} \alpha^2 T \tag{2}$$

$$\alpha \cdot U = 0 \tag{3}$$

式中: U 为无量纲速度向量; T 为无量纲温度; P 为无量纲压力; i 为重力加速度单位向量; Pr 为 Prandtl 数, $Pr=0.17$; $K=k/k_f$, k 和 k_f 分别为当地导热系数和方腔内工作流体(空气)的导热系数. 无量纲时间变量及 Rayleigh 数的定义如下

$$F = \frac{a}{H^2} (RaPr)^{1/2} \tag{4}$$

$$Ra = \frac{gH^3(T_h - T_c)}{a} \tag{5}$$

式中: t 为时间变量; α 、 g 、 a 和 ν 分别为热膨胀系数、重力加速度、热扩散系数和运动粘度; 参考尺度取为竖板的高度 H .

问题的边界条件和初始条件为

$$\left. \begin{aligned} X=0, & \quad U=0, & \quad T=0 \\ X=L/H, & \quad U=0, & \quad T=0 \\ Y=0, & \quad U=0, & \quad \frac{5T}{5Y}=0 \\ Y=L/H, & \quad U=0, & \quad \frac{5T}{5Y}=0 \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

$$F=0, \quad U=0, \quad P=0, \quad T=0 \tag{7}$$

式中: X 和 Y 均是以 H 为参考尺度的空间坐标变量. 本文采用的是整体解法,方腔内的竖板成了计算区域内部,其中的导热与方腔内空气的流动和换热耦合在一起求解,因此还要附加以下条件

$$\text{竖直板} \quad U=0, \quad T=1, \quad K=\text{大数(本文取为 } 10^{16}) \tag{8}$$

本文采用的数值方法是基于原始变量的 SIM2 PLE 方法,对流扩散项采用 QUICK 方案离散. 计算采用 $60(X) \times 60(Y)$ 非均匀网格,无量纲时间步长 F 经过试算比较后取为 0.1001. 计算区域整体求解,平均的 Nusselt 数用两点插值公式按以下定义计算

$$Nu = \frac{H}{2(H+W)} \left(\begin{aligned} & \left. \frac{L/H}{0} - \frac{5T}{5X} \right|_{x=0} dY + \\ & \left. \frac{L/H}{0} \frac{5T}{5X} \right|_{x=L/H} dY \end{aligned} \right) \tag{9}$$

2 计算结果与分析

本文模拟了 Ra 为 10^4 、 5×10^4 、 10^5 、 10^6 几种情况下的流动和换热,下面是数值结果及其分析和讨论.

2.1 流动与换热的振荡

取不同 Ra 时空间监测点的 T 及 Nu 的数值模拟计算结果见图 2. 空间监测点的无量纲空间坐标 $X=113$ 、 $Y=1153$. 为了更清楚地看到 T 和 Nu 的时间响应,图 2c 和图 2d 分别给出了 $Ra=10^5$ 时 $T-F$ 和 $Nu-F$ 的局部放大图. 由图 2 可见,当 $Ra=10^4$ 和 5×10^4 时,在 F 足够大后, T 和 Nu 不随时间变化,流动和换热是稳态的,所得到的是定态解. 当 $Ra=10^5$ 时和 10^6 时, T 和 Nu 随时间变化发生振荡,因而流动和换热是非稳态的. 这表明在 $Ra=5 \times 10^4$ 和 10^5 之间出现了解的分岔,流动和换热由定态解分岔为振荡解. 由放大图图 2c、图 2d 能够更清楚地看到 $Ra=10^5$ 时监测点温度 T 及 Nu 随时间的振荡,并且振荡已偏离了周期性. 图 3 示出了 $Ra=10^5$ 时流场随时间的变化. 由图 3 可见, $F=749$ 、 775 时的流场与 $F=759$ 、 786 时的流场很相像,但并不完全相同,表明流场随时间振荡,但不是周期

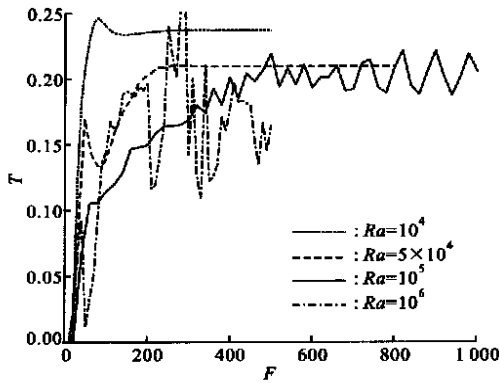
的. 以上的结果和分析表明, 在所考虑的参数区间范围内, 数值结果存在分岔, 流动和换热随参数 Ra 的增大由稳态变为非稳态, 因此数值计算应采用非稳态模型.

2.1.2 初始条件对解的影响

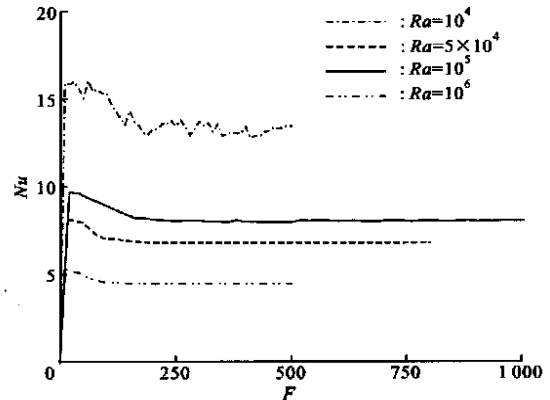
上面所给出的数值结果都是从 0 初始场开始的, 即以式 (7) 为初始条件, 记作 0 初场. 为了考察初始状态对数值结果的影响, 现以 $Ra = 10^6$ 、在时刻 $F = 500$ 时的流场与压力场和温度场的数值结果作为求解的初始条件, 对 Ra 取不同值的情形进行计算, 所获得的数值结果记作非 0 初场. 上述 2 种不同初始条件下所获得的监测点温度 T 和 Nu 的时间响应分别由图 4 和图 5 给出. 由图 4a 可见, $Ra = 10^4$ 时 0 初场和非 0 初场的温度变化曲线完全重合, 并且时间足够长后温度为一个常数, 这表明经过充分

换热后, 这 2 种初始条件下数值解是惟一的. 当 $Ra = 5 \times 10^4$ 时, 0 初场的温度变化曲线在 F 大于某时刻后是一条水平线, 即温度为常数, 而非 0 初场的温度变化曲线随时间是振荡的, 如图 4b 所示. 这表明在 $Ra = 5 \times 10^4$ 时至少有 2 个解, 并且这 2 个解的性质不同. 当 $Ra = 10^5$ 时, 由图 4c 可见, 0 初场和非 0 初场的温度变化曲线都是随时间振荡的. 图 5 所显示的各种不同情形下 Nu 的计算结果与上述温度监测点的情况是一致的, 即 $Ra = 10^4$ 时 0 初场和非 0 初场的 Nu 是惟一的常数, $Ra = 5 \times 10^4$ 时在不同的初始场可分别得到定态解和振荡解, $Ra = 10^5$ 时在不同的初始场得到的都是振荡解.

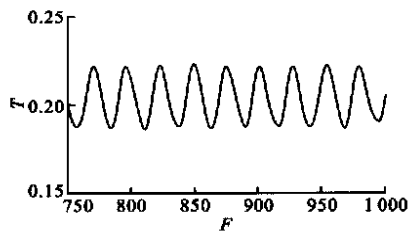
以上数值结果和分析表明, 在所考虑的 Ra 参数区间 $[10^4, 10^6]$ 内, 存在解的分岔现象, 问题具有明显的非线性特征, 但受研究范围所限, 本文只是用



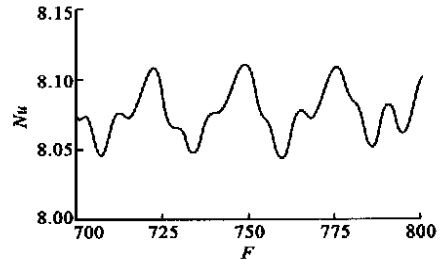
(a) Ra 不同时监测点温度随时间的变化



(b) Ra 不同时 Nu 随时间的变化

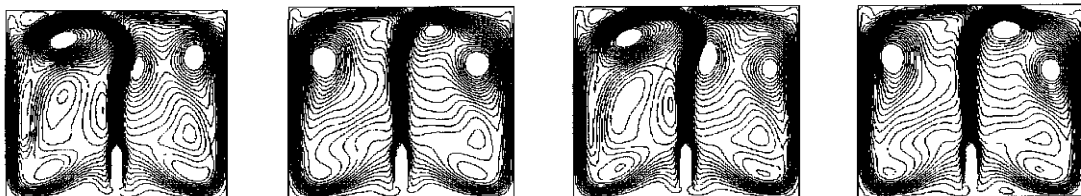


(c) $Ra = 10^5$ 时监测点温度随时间变化的局部放大图



(d) $Ra = 10^5$ 时 Nu 随时间变化的局部放大图

图 2 数值模拟结果



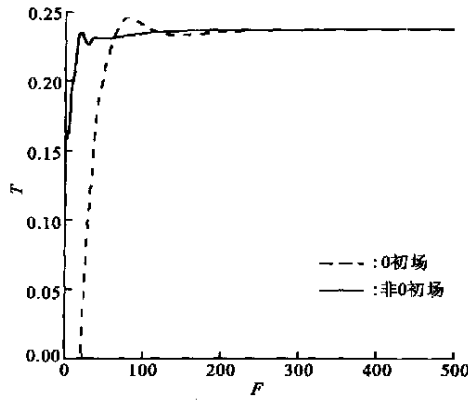
(a) $F = 749$

(b) $F = 759$

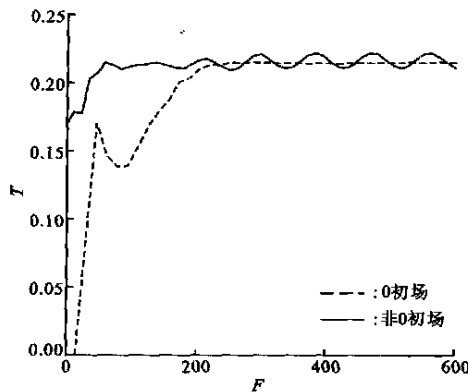
(c) $F = 775$

(d) $F = 786$

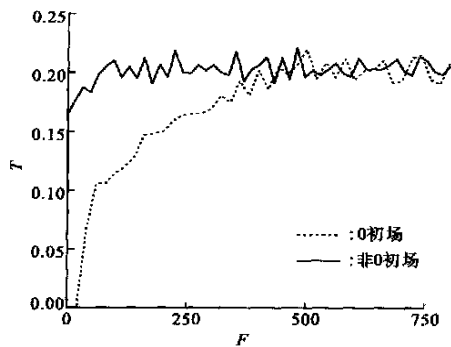
图 3 $Ra = 10^5$ 时流场随时间的变化



(a) $Ra = 10^4$



(b) $Ra = 5 \times 10^4$



(c) $Ra = 10^5$

图 4 监测点温度随时间的变化

数值实验的方法揭示了所存在的部分非线性现象,更能揭示事物本质和问题的全部特征的非线性特性分析和稳定性分析还有待更深入的理论研究.

3 结论

(1)在 Ra 参数区间 $[10^4, 10^6]$ 内,随 Ra 的增大,问题从稳态变为非稳态,其数值解从定态解分岔为振荡解.

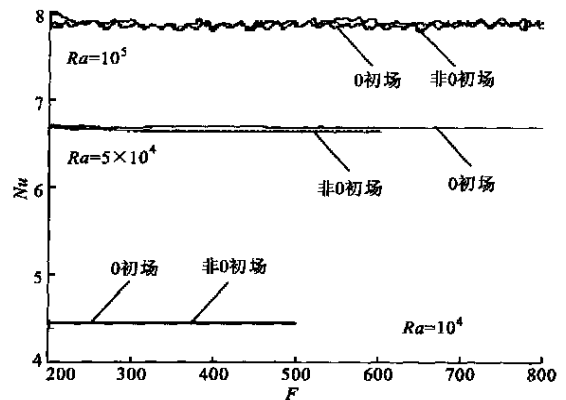


图 5 Ra 不同时初始条件下 Nu 随时间的变化

(2)数值结果在 Ra 的某个参数范围内不是唯一的,与初始条件相关.

(3)在 $Ra = 10^4$ 时采用 2 种不同的初始条件获得了唯一的稳态数值解.

(4)在 $Ra = 5 \times 10^4$ 时采用 2 种不同的初始条件能够获得 2 个性质的数值解,其中一个为稳态解,而另一个为振荡解.

参考文献:

- [1] Koizumi H. Laminar-turbulent transition behavior of fully developed air flow in a heated horizontal tube[J]. Int J Heat and Mass Transfer, 2002, 45(1): 5 - 9.
- [2] 陶建军, 颜大椿. 竖直加热平板自然对流边界层中流动稳定性与转捩过程的实验研究[J]. 北京大学学报, 1999, 35(3): 340 - 345.
- [3] 王建刚, 杨 茉, 赵 明, 等. 底部加热的低 Prandtl 数流体自然对流的分岔[J]. 工程热物理学报, 2003, 24(1): 76 - 78.
- [4] 杨 茉, 赵 明, 叶剑军, 等. 非稳态横掠管束周期性充分发展对流换热的数值模拟[J]. 工程热物理学报, 2003, 24(6): 988 - 991.
- [5] 吴群刚, 梁新刚, 陈泽敬, 等. 方腔斜进风对流换热分叉现象的数值研究[J]. 清华大学学报, 2000, 40(12): 102 - 105.
- [6] 邹 宽, 杨 茉, 张宏艳, 等. 方形空间内混合对流换热的数值研究[J]. 工程热物理学报, 2001, 22(2): 207 - 210.
- [7] Lin Minghan. Numerical study of thermal instability in mixed convection flow over horizontal and inclined surfaces[J]. Int J Heat and Mass Transfer, 2002, 45(1): 18 - 24.
- [8] Bazzi H. Numerical simulations of oscillatory Maragoni convective flow inside a cylindrical liquid zone[J]. Int J Therm Sci, 1999, 38(6): 863 - 878.

(编辑 王焕雪)